CM71sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2007-2008
Laurea specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Prima settimana (1-7.10.2007)

2.10.2007 - martedì

I numeri dei paragrafi si riferiscono al vol. II del libro di testo consigliato.

Richiamo sugli spazi metrici; nozione di distanza, sua positività, escono fuori i coefficienti con il modulo, simmetria, disuguaglianza triangolare.
La distanza euclidea:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}.$$

Richiamo sugli spazi vettoriali su un corpo numerico (ci interesseranno solo i reali e i complessi). Un corpo numerico è una struttura dotata di due operazioni (nel nostro caso entrambe commutative), dalla quale si estraggono i coefficienti che compaiono nelle combinazioni lineari dei vettori dello spazio.

La norma e gli spazi normati; disuguaglianza triangolare. Uno spazio normato si può sempre far diventare uno spazio metrico ponendo:
$d(x,y) = ||x-y||$ (1.1.13).
Norme diverse (1.1.30).
Spazio *prehilbertiano*: *prodotto scalare* $p : V \times V \to \mathbb{K}$, simmetria, (con il coniugio), vengon fuori i coefficienti, distributività rispetto alla somma, realtà e positività di $\langle x, x \rangle$.

Convergenza in uno spazio metrico: convergenza secondo Cauchy, completezza.
Spazio *topologico* V: sistema di intorni $I_\epsilon(x) = \{y \in V : d(x,y) < \epsilon\}$.
Convergenza secondo Cauchy in uno spazio topologico; *completezza*.
Uno spazio normato completo si dice *spazio di Banach*.

Sottoinsieme *denso* in uno spazio metrico.
(definizioni, esempi ed esercizi da 1.1.18 a 1.1.21)

Spazio metrico *separabile*.
Spazio *hilbertiano*: prehilbertiano, completo, separabile e di dimensione infinita.

3.10.2007 - mercoledì

Definizione di ortogonalità.

Disuguaglianza di Schwarz (ha senso soltanto negli spazi prehilbertiani):

$$|\prec x, y \succ|^2 \leq \prec x, x \succ \cdot \prec y, y \succ$$

e vale il segno di uguaglianza se i due vettori sono linearmente dipendenti.□

Isomorfismo tra spazi vettoriali e tra spazi di Hilbert (1.1.27).

Lo spazio ℓ^2 (1.1.28): è costituito da successioni $\{a_i\}$ tali che $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < +\infty$.
Il prodotto scalare tra due successioni $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ è dato da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.
Questo spazio è l'immediata generalizzazione degli spazi a dimensione finita ($\mathbb{R}^n$).

Gli spazi funzionali (1.5)
Esempi ed esercizi da 1.5.8 a 1.5.13 (saltando 1.5.11). Esercizi proposti del cap. 1 (saltando i n.^{i} 2, 3, 4, 7, da 10 a 14, 16; per le soluzioni vd. Appendice A).

Dimensioni, basi ed approssimazioni (§1.9).

0.0.1 DEFINIZIONE. In uno spazio V a dimensione infinita un sistema di vettori $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ si dice *base* se per ogni vettore $v \in V$, $\forall \epsilon > 0$ si può trovare un numero finito $k(\epsilon)$ di coefficienti c_i tale che:

$$||x - \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} c_i u_i|| < \epsilon.$$

□

0.0.2 TEOREMA. *(della migliore approssimazione in norma) (senza dim.): Dato uno spazio (pre)hilbertiano ed in esso una famiglia di vettori ortonormali $\{u_k\}$, i coefficienti $\{c_k\}$ che rendono minima la norma*

$$||x - \sum_{k=1}^{n} c_k \; u_k||$$

sono dati da

$$a_k = \langle x, u_k \rangle.$$

Alcuni esempi di spazi funzionali (= costituiti da funzioni):
$C^0([a,b]),\ C^1([a,b]), L^1([a,b]), L^2([a,b])$. Verifica di alcune funzioni che sono contenute in uno spazio e non nell'altro.

Ovviamente è $C^1 \subset C^0$ e C^0 è palesemente sottoinsieme sia di L^1 che di L^2. Su quale spazio è contenente e quale è contenuto tra L^1 ed L^2 la cosa varia a seconda di come è fatto l'intervallo $[a,b]$. Ad es. se poniamo $[a,b]=[0,1]$ abbiamo che $1/x$ non appartiene a né ad L^1 né ad L^2. Però $1/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$, mentre è $1/\sqrt{x} \notin L^2([0,1])$. Invece $1/\sqrt[4]{x}$ appartiene sia all'uno che all'altro. Pertanto se l'intervallo è $[0,1]$ è $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, mentre sarebbe il viceversa se l'intervallo fosse una semiretta (*non abbiamo dimostrato* queste inclusioni, abbiamo solo verificato che esiste un vettore che sta nell'uno e non nell'altro).

4.10.2007 - giovedì

Norme diverse nei diversi spazi funzionali: in C^0 c'è la norma del sup (dato che sono funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, tanto vale dire "max"), in L^2 c'è la norma dell'integrale

$$||f||_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

che proviene dal prodotto scalare seguente:

$$\prec f, g \succ = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx$$

in $L^1([a,b])$ c'è la norma dell'integrale

$$||f||_{L^([a,b])} = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

che *non* proviene da nessun prodotto scalare.

Densità (def. 1.6.1).

Teoremi di densità: C^1 è denso in C^0, che è denso in L^2 che d̀enso in L^1. (teorr. 1.6.4, 1.6.5, 1.6.6)

Teorema di Fischer-Riesz (senza dim.; teor. 1.5.15 solo nel caso $p=2$), dove il prodotto scalare è definito così:

$$\prec f, g \succ = \int_E f\overline{g}$$

e la norma quindi risulta

$$||f||_{L(E)} = \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2}$$

Il teorema asserisce che L^2 è uno spazio di Hilbert, e ne dà alcune proprietà: data una successione che converge secondo Cauchy, se ne può estrarre una che converge in senso ordinario ad una funzione $f \in L^2$; inoltre f_n converge ad f nella norma di L^2.

Norme diverse su $C^0([a,b])$.
Relazioni tra la norma e la convergenza.
Esercizi 1.5.24, 1.5.28 (tipi di convergenza); 1.5.30.

5.10.2007 - venerdì

Esempio di successione di funzioni di C^1 che converge nella norma di C^0 ma non in quella di C^1 (semicirconferenze arrotondate agli estremi dei diametri, e di diametro sempre più piccolo: c'è convergenza uniforme, ma non quella delle derivate).

Riprendere il concetto di *base* per uno spazio vettoriale a dimensione infinita.

Concetto di *ortonormalità*.
Riprendere il teor. della migliore approssimazione in norma (mostrare dove entra in gioco l'ortonormalità, mostrare come si rende minima la norma).

Se il sistema è linearmente indipendente, risulta dunque

$$||x||^2 \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \text{ nel caso reale}$$
$$||x||^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \text{ nel caso complesso}$$

(*disuguaglianza di Bessel*).

Se il sistema forma una base, cioè un sistema completo, si ha l'uguaglianza (*identità di Parceval*, che estende ad uno spazio a dimensione infinita il teor. di Pitagora).

Un sistema di vettori in uno spazio di Hilbert H si dice *chiuso* se l'unico vettore ortogonale a tutti gli elementi delsistema è il vettore nullo.

0.0.3 TEOREMA. *In uno spazio hilbertiano ogni sistema chiuso è completo e viceversa.*

Serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$$

e sviluppo di una funzione in serie di funzioni.
Se gli u_n sono funzioni trigonometriche, la funzione è sviluppata in serie di funzioni trigonometriche.
Le serie trigonometriche possono scriversi con i seni e i coseni, oppure con le esponenziali complesse, oppure con gli angoli di sfasamento.

0.0.4 Teorema. *Se una serie trigonometrica converge uniformemente ad una f, allora tale serie ha i coefficienti:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \ \cos nx \ dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \ \sin nx \ dx$$

Si dice *serie di Fourier* una serie trigonometrica che ha quei coefficienti.

Richiami sulle serie di Taylor e significato delle convergenze dei due tipi di serie.

Il caso delle funzioni continue: se f è continua, la serie di Fourier di f converge ad f in media quadratica (= nella norma di $L^2([-\pi, \pi])$).

Criteri di convergenza

0.0.5 Teorema. *(***Criterio di Riemann-Lebesgue***) Se $f \in L([a, b])$, allora è*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x} \ dx = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e quindi i coefficienti di Fourier tendono a 0 comunque, anche se la serie di Fourier non converge.

La dim. (cenni) è significativa perché si dimostra la tesi per $f \in C^1([a, b])$ e poi si sfrutta la densità di C^1 in $L([a, b])$.
Si integra per parti e poi si maggiora il modulo dell'integrale della derivata.

0.0.6 Teorema. *(***Criterio del Dini***) Sia $f \in L([a, b])$; se per x fissato esiste in corrispondenza un numero reale $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\right| dz < +\infty$$

allora la serie di Fourier converge in x ad $f(x)$.

0.0.7 Teorema. *(di Riemann sul carattere locale della convergenza della serie di Fourier) La convergenza o meno in un punto x della serie di Fourier dipende dai valori della funzione in un intorno di quel punto arbitrariamente piccolo, mentre i coefficienti della serie dipendono dai valori su tutto l'intervallo.*

0.0.8 Esercizio. Non è detto che una funzione continua in un punto soddisfi in quel punto la condizione del Dini; la continuità indica semplicemente che il numeratore della funzione integranda tende a zero, ma potrebbe tendere a zero di un ordine inferiore a qualsiasi ordine inferiore al primo. □

0.0.9 Teorema. *(***Condizioni del Dini unilaterali***): se esistono finiti il limite destro e sinistro della f, e sono finiti gli integrali fatti sugli intervalli tra 0 e δ e tra $-\delta$ e 0, allora la serie di Fourier converge alla media dei due limiti:*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(niente dim.)

Nel caso che f sia continua, e siano soddisfatte le condizioi del Dini unilaterali, si ha il criterio del Dini visto prima.

<u>Punti di salto</u>: se esistono i limiti destro e sinistro per $x \to x_0$ diversi tra loro, si dice *salto* la quantità $f(x_0+0)-f(x_0-0)$. È irrilevante se la f esista in quel punto ed eventualmente quale valore abbia.

Condizione di Hölder; definizione di funzione hölderiana di ordine α in un punto. (def. 2.6.22)

Se $\alpha = 1$ la funzione si dice *lipschitziana.*

Notiamo che se una funzione è hölderiana in un punto, è certamente continua in quel punto.

Funzioni hölderiane e loro relazione con le funzioni derivabili; funzioni lipschitziane (2.6.22; 2.6.23).

Esempio di funzione non hölderiana di nessun ordine α ($1/\lg|x|$ in un opportuno intorno di 0; vd. 2.6.24).

0.0.10 Teorema. *Se f ha derivata limitata in un intero intervallo $[a,b]$ allora è uniformemente lipschitziana in $[a,b]$.*

(senza dim.) (2.6.26)

Esistono però funzioni che sono lipschitziane in un punto pur non avendo la derivata limitata in nessun intorno del punto:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} \; per \; x = 0 \\ 0 \; per \; x = 0 \end{cases}$$

Teorema sulla convergenza della serie di Fourier nei punti di hölderianità (con dim.) (2.6.28).

Condizioni di Hölder unilaterali (con la h che può variare solo in un intorno destro o in un intorno sinistro; vd. 2.6.30).

0.0.11 Teorema. *Se f ha dei punti di salto, e in tali punti verifica le condizioni di Hölder unilaterali, la serie di Fourier converge alla media dei limiti destro e sinistro.*

(niente dim.)

Condizioni di Dirichlet e criterio di Dirichlet (2.7.1; 2.7.2); rapidità della convergenza a zero dei coefficienti (cenno).

Accelerazione della convergenza (2.7.8, cenno).
Confronto con la continuità e con il criterio del Dini (2.7.10; 2.7.11).

Fenomeno di Gibbs (2.7.22).

Esercizi proposti del Capitolo 2 (per le soluzioni vd. Appendice A in fondo al libro).

****

Non fanno parte del programma d'esame: (i numeri si riferiscono al libro di testo: C. Minnaja: Metodi matematici per l'Ingegneria, Parte II - Integrale di Lebesgue, serie di Fourier, trasformate, distribuzioni. Ed. Progetto, 2000): 1.1.11; 1.1.12; la dim. della completezza di ℓ^2 (a p. 9); 1.1.31; 1.1.32; 1.1.39; da 1.2 a 1.8; da 1.9.5 a 1.9.9; dim di 1.9.10; da 1.9.13 a 1.9.17; esercizi proposti 1, 3, 7, 10 di p. 46; dim. di 2.1.10; dim. di 2.1.12; 2.1.17; il calcolo di 2.2.3; 2.2.9; 2.4; dim. di 2.5.1; dim. di 2.5.3; da 2.5.10 a 2.5.18; dim. di 2.6.2; caso 3) dell'es. 2.6.5; da 2.6.6 a 2.6.14; dim. di 2.6.15; 2.6.16 (ad eccezione delle ultime sei righe); dim. di 2.6.19; 2.6.33; da 2.7.12 a 2.7.21; da 2.8 a 2.11; esercizi 7, 8, 16, 17 di p. 123; esercizio 28 di pag. 124.