Seconda settimana

9.10.2007 - martedì

Richiami sulle serie di Taylor e significato delle convergenze dei due tipi di serie.

Il caso delle funzioni continue: se f è continua, la serie di Fourier di f converge ad f in media quadratica (= nella norma di $L^2([-\pi, \pi])$).

Criteri di convergenza

0.0.1 TEOREMA. *(***Criterio di Riemann-Lebesgue***) Se $f \in L([a, b])$, allora è*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} \, dx = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

In particolare, se ciò è vero per x è vero per la variabile $n \to \infty$, e siccome $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ (questo lo si vedrà quando si tratteranno le funzioni di variabile complessa), basta dimostrare che tendono a zero gli integrali del tipo

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx$$

che sono proprio i coefficienti di Fourier; quindi i coefficienti di Fourier tendono a 0 comunque, anche se la serie di Fourier non converge. La dim. (cenni, fatti solo sui coefficienti a_n) è significativa perché si dimostra la tesi per $f \in C^1([a, b])$ e poi si sfrutta la densità di C^1 in $L([a, b])$.
Si integra per parti e poi si maggiora il modulo dell'integrale della derivata (vd. prima metà della p. 78).

0.0.2 TEOREMA. *(***Criterio del Dini***) Sia $f \in L([a, b])$; se per x fissato esiste in corrispondenza un numero reale $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right| dz < +\infty$$

allora la serie di Fourier converge in x ad $f(x)$.

0.0.3 TEOREMA. *(di Riemann sul carattere locale della convergenza della serie di Fourier) La convergenza o meno in un punto x della serie di Fourier dipende dai valori della funzione in un intorno di quel punto arbitrariamente piccolo, mentre i coefficienti della serie dipendono dai valori su tutto l'intervallo.*

0.0.4 ESERCIZIO. Non è detto che una funzione continua in un punto soddisfi in quel punto la condizione del Dini; la continuità indica semplicemente che il numeratore della funzione integranda tende a zero, ma potrebbe tendere a zero di un ordine inferiore a qualsiasi ordine inferiore al primo. □

0.0.5 TEOREMA. *(**Condizioni del Dini unilaterali**): se esistono finiti il limite destro e sinistro della f, e sono finiti gli integrali fatti sugli intervalli tra 0 e δ e tra $-\delta$ e 0, allora la serie di Fourier converge alla media dei due limiti:*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(niente dim.)

Nel caso che f sia continua, e siano soddisfatte le condizioi del Dini unilaterali, si ha il criterio del Dini visto prima.

Punti di salto: se esistono i limiti destro e sinistro per $x \to x_0$ diversi tra loro, si dice *salto* la quantità $f(x_0+0)-f(x_0-0)$. È irrilevante se la f esista in quel punto ed eventualmente quale valore abbia.

Condizione di Hölder; definizione di funzione hölderiana di ordine α in un punto. (def. 2.6.22)

Se $\alpha = 1$ la funzione si dice *lipschitziana*.

Notiamo che se una funzione è hölderiana in un punto, è certamente continua in quel punto.

Esempio di funzione non hölderiana di nessun ordine α ($1/\lg|x|$ in un opportuno intorno di 0; vd. 2.6.24).

10.10.2007 - mercoledì

Funzioni hölderiane e loro relazione con le funzioni derivabili; funzioni lipschitziane (2.6.22; 2.6.23).

0.0.6 TEOREMA. *Se f ha derivata limitata in un intero intervallo $[a,b]$ allora è uniformemente lipschitziana in $[a,b]$.*

(senza dim.) (2.6.26)

Esistono però funzioni che sono lipschitziane in un punto pur non avendo la derivata limitata in nessun intorno del punto:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \ \textit{per}\ x = 0 \\ 0 \ \textit{per}\ x = 0 \end{cases}$$

Teorema sulla convergenza della serie di Fourier nei punti di hölderianità (con dim.) (2.6.28).

Condizioni di Hölder unilaterali (con la h che può variare solo in un intorno destro o in un intorno sinistro; vd. 2.6.30).

0.0.7 TEOREMA. *Se f ha dei punti di salto, e in tali punti verifica le condizioni di Hölder unilaterali, la serie di Fourier converge alla media dei limiti destro e sinistro.*

(2.6.31, senza dim.)

Confronto con la continuità e con il criterio del Dini (2.7.10; 2.7.11).

Accelerazione della convergenza (2.7.8, cenno).

Fenomeno di Gibbs (2.7.22).

11.10.2007 - giovedì

Prolungamento per periodicità, per parità, per disparità.

Convergenze delle serie di Fourier di funzioni $f \in C^0(\mathbb{R})$, periodiche di periodo 2π: se c'è convergenza uniforme, allora la convergenza è ad f (2.5.3); due funzioni continue che hanno la stessa serie di Fourier coincidono (2.5.5, 2.5.6).

Definizione di *convergenza totale*: se $|f_n(x)| \leq a_n$ dove a_n sono i termini di una serie *numerica* convergente.

Se una serie di funzioni converge totalmente, allora converge uniformemente (ovvio).

0.0.8 TEOREMA. *Se $f \in C^2(\mathbb{R})$, periodica di periodo 2π, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente ad f.*

La dim. ricalca la dim. del teor. di Riemann Lebesgue fino alle considerazioni sulla derivata prima; la continuità della f'' garantisce la convergenza a 0 dei coefficienti come $1/n^2$, quindi la convergenza totale e quindi la convergenza uniforme.

Esercizi proposti del Capitolo 2 (per le soluzioni vd. Appendice A in fondo al libro).

Funzioni di una variabile complessa

Richiami sui numeri complessi, modulo, argomento. Forma algebrica, forma trigonometrica. Argomento principale. Potenze, radici. Insiemi limitati ed illimitati, insiemi connessi, domini, regioni.
Isomorfismo tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$. (Dal vol. I del libro di testo: da 1.1.1 a 1.2.7)

Richiami sulle curve: curve regolari, curve chiuse, curve semplici.
Retta tangente ad una curva:

$$\frac{y - y_0(t)}{y'(t_0)} = \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)}$$

Circonferenze, semicirconferenze.

Contorni: sono le curve chiuse e semplici.
Teor. di Jordan per le curve *chiuse e semplici* (1.3.10).

12.10.2007 - venerdì

Archi isoorientati se hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza.
Angolo tra due curve (provviste di tangenti).
Lunghezza di una curva regolare (c'è bisogno che ci siano le derivate)

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt$$

Regioni a connessione multipla.
Archi omologhi: isoorientati e che circondano la stessa parte della frontiera di Ω.

Definizione, limiti e continuità per una funzione di variabile complessa (2.1, 2.2)

Studio (sintetico) della funzione $f(z) = z^2$. Le rette parallele agli assi hanno come immagine delle parabole (eventualmente degeneri).

Funzione esponenziale e verifica che non si annulla mai (dal vol. I del libro di testo: 2.3.

Rapida dimostrazione della sua periodicità complessa (è stata verificata soltanto la non iniettività).
Immagine delle rette parallele agli assi.
Calcolo di $e^{-i\pi} = -1$.

Formule di Eulero e legami tra l'esponenziale complessa e le funzioni trigonometriche.

Funzioni di una variabile complessa: definizione di derivata, olomorfia, condizioni di Cauchy-Riemann (solo enunciato, sia per la parte necessaria che per la parte sufficiente).

****

Non fanno parte del programma: dim. di 2.2.1; 2.2.3; 2.2.5; 2.2.8; 2.2.9; 2.3.5; 2.3.6; da 2.3.9 a 2.3.13; 2.4; dim. di 2.5.1; dim. di 2.5.3; da 2.5.10 a 2.5.18; la seconda parte della dim. di 2.6.2; caso 3) dell'es. 2.6.5; da 2.6.6 a 2.6.14; dim. di 2.6.15; 2.6.16 (ad eccezione delle ultime sei righe); dim. di 2.6.19; dim. di 2.6.26; dim di 2.6.31; 2.6.33; 2.6.34; da 2.7.1 a 2.7.7; da 2.7.10 a 2.7.21; da 2.8 a 2.11; esercizi 3,4, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19 di p. 123; esercizi 25, 28 di pag. 124.
Per la variabile complessa i numeri si riferiscono al testo *Metodi matematici per l'ingegneria, vol. I - Funzioni di una variabile complessa*: la seconda parte di 2.3.4; 2.5; 2.6.5; 2.6.6; dim. di 2.7.6;2.7.7; 2.7.8; dim. di 2.7.9; 2.7.10.