Terza settimana

16.10.2007 - martedì

Funzioni trigonometriche complesse: seno, coseno, tangente e funzioni iperboliche (2.3.7-2.3.14)

Esercizio: studio di z^2 (3.1.13)

Esponenziale e logaritmo come funzione inversa (plurivoca) dell'esponenziale (2.4.1-2.4.2). Rappresentazione intuitiva del logaritmo (2.5.3).

17.10.2007 - mercoledì

Funzione potenza (2.4.3-2.4.10)

Definizione di derivata complessa e sua relazione con le derivate parziali delle funzioni di due variabili.

Regole di derivazione: uguali a quelle per le funzioni di una variabile reale (2.6.2- 2.6.4; 2.6.7).

Esercizi da fare: 2.6.9; 2.6.10.

Definizione di funzione olomorfa e primi esempi (2.7.1-2.7.2) (direttamente, senza menzionare il lemma di Goursat)

Condizioni di Cauchy-Riemann: loro necessità (2.7.6, senza dim.) e loro sufficienza (2.7.9, senza dim.)

Richiamo sulle curve, sugli integrali curvilinei, sulle forme differenziali e loro integrali (4.1.1-4.1.3).

Definizione di integrale di una funzione complessa su una curva (4.2.1)

18.10.2007 - giovedì

Punti singolari isolati: funzione: $f(z) = \frac{1}{z}$ (2.7.5). Sua rappresentazione (inversione per raggi vettori reciproci: 3.1.10; si rende reale il denominatore). La circonferenza unitaria è unita, ma i punti con ascissa positiva si scambiano con quelli di ascissa negativa. Le circonferenze con raggio maggiore e minore di 1 si scambiano.
Proiezione stereografica della sfera.

Esempi ed esercizi:
Una funzione non costante che ha soltanto valori reali non può essere olomorfa (2.7.11); una funzione olomorfa che ha modulo costante è costante essa stessa (si deriva parzialmente sia rispetto ad x che rispetto ad y, e si fa sistema; poi si applicano le condizioni di Cauchy-Riemann e si risolve con la regola di Cramer: commenti sul determinante).

Le funzioni olomorfe hanno le componenti che sono funzioni armoniche (laplaciano nullo) (2.7.13).

Armoniche coniugate: si fissa una funzione armonica $u(x, y)$ e si cercano quelle $v(x, y)$ (ovviamente armoniche anch'esse) che rendono $u+iv$ olomorfa

(2.7.16, in particolare formula (2.7.12)). Ovviamente, trovatane una, tutte quelle che differiscono per una costante (reale o complessa) sono del pari coniugate.

La trasformazione conforme (3.1.)
Regola della catena: significato della derivata in un punto. Definizione di trasformazione conforme e isogonica (3.1.3)

Teorema sulla trasformazione indotta da una funzione olomorfa con derivata diversa da zero (3.1.1, senza dim., e sua riformulazione 3.1.4).

Riprese delle trasformazioni e^z, $1/z$; studio di $1/\overline{z}$, che dà una trasformazione isogonica, ma non conforme. Ripresa di z^2, con derivata nulla nello 0.

19.10.2007 - venerdì

Integrale sull'unione di curve consecutive (additività: 4.2.2).
Circuitazione (4.2.3).

Simbologia: $|dz| = |d(x+iy)| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$.
Maggiorazioni tra i moduli (4.2.3)

Formula di Darboux: se una funzione è continua lungo una curva regolare L di lunghezza ℓ, e su questa curva è $|f(z)| \leq M$, allora vale

$$|\int_L f(z)\ dz| \leq M\ell.$$

Richiamo sulle regioni a connessione multipla, sui contorni omologhi (che circondano la stessa parte della frontiera di Ω), contorni omologhi a 0, e quindi su archi omologhi (se $\exists$ un terzo arco che abbia solo gli estremi in comune con i primi due, e tale che i contorni $\gamma_1 - \gamma_3$ e $\gamma_2 - \gamma_3$ siano omologhi tra loro) (§1.4).

Lemma prioritario al teor. di Cauchy: su un contorno (ovviamente chiuso) omologo a 0 la funzione 1 e la funzione z hanno integrale nullo (4.3.1).

Teorema di Cauchy (4.3.2), detto con la $f'(z)$ continua.
Inizio della dimostrazione (semplicemente scrivere l'integrale).

Racconto intuitivo del lemma di Goursat.

Tero. di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse (4.3.5-4.3.8).

****

Non fanno parte del programma (I numeri si riferiscono al testo *Metodi matematici per l'ingegneria, vol. I - Funzioni di una variabile complessa*: 2.6.5; 2.6.6; 2.7.3; dim. di 2.7.6; 2.7.7; 2.7.8; dim. di 2.7.9; 2.7.10; 2.7.18; 2.7.20; da 2.7.22 a 2.7.25; dim. di 3.1.1; 3.1.14; 3.1.15; 3.2; tra gli es. proposti: 3, 4, 5.