Quarta settimana
23.10.2007 - martedì

Accenno al teor. di Cauchy nella formulazione prima che esistesse il teor. di Goursat.

Il teor. di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse (4.3.5-4.3.6). Si considerano due contorni omologhi C e Γ, poi si effettua un "taglio" γ.

Ricordiamo che si dicono contorni omologhi quelli che circondano parti uguali della frontiera di Ω.
Esempi di contorni che *non* sono omologhi tra loro.

Immediata conseguenza del teor. di Cauchy è che l'integrale di una funzione olomorfa fatto su archi omologhi non dipende dall'arco, bensì soltanto dagli estremi.

Se Ω è una regione semplicemente connessa, tutti gli archi isoorientati che hanno gli stessi estremi sono omologhi e quindi risulta univocamente determinata la funzione

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\ dt$$

detta *funzione integrale*.
Vale il teor. (estensione del teor. di Torricelli) *Se f è olomorfa in una regione Ω semplicemente connessa, allora la funzione integrale è olomorfa e vale $F'(z) = f(z)$.*
(niente dim.)

Formula di Cauchy: *Si abbia un contorno C omologo a 0 in Ω, se a è un punto racchiuso da tale contorno vale:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\ dz.$$

La dim. si basa sul fatto che si può dimostrare la formula abbastanza facilmente se C è una circonferenza di centro a, cosicché è $z - a = \rho e^{i\theta}$ da cui $dz = i\rho e^{i\theta}\ d\theta$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Allora vale

$$\oint \frac{f(z)}{z-a}\ dz = \oint \frac{f(a)}{z-a}\ dz + \oint \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\ dz$$

L'ultimo integrale va a 0 per la formula di Darboux: infatti la f è derivabile in a e quindi il limite del rapporto incrementale per $z \to a$ è finito. Pertanto il modulo del rapporto incrementale è limitato in un intorno di a.

La lunghezza della circonferenza C la si può far diventare piccola quanto si vuole (la maggiorazione è del modulo), e il primo integrale del 2o membro vale $f(a) \cdot 2\pi i$ (attenzione: il libro porta erroneamente, nella formula successiva alla (4.4.4), $2\pi\rho$ invece che 2π).

Sembra strano che basti conoscere una funzione olomorfa su un contorno per conoscerla dentro; invece strano non è, perché una funzione olomorfa soddisfa un sistema di equazioni differenziali (le condizioni di Cauchy-Riemann), e quindi i valori su C sono i valori al contorno che determinano i valori della funzione all'interno del contorno stesso.

Considerazioni sul valore dell'integrale a seconda se a è dentro, fuori o su C. Se a è racchiuso dal contorno C, il rapporto incrementale *non* è una funzione olomorfa all'interno del contorno, e quindi l'integrale non è obbligato a risultare 0 per il teor. di Cauchy. È invece una funzione olomorfa entro C se a è esterno a C.
Se a è su C l'integrale non esiste, perché il rapporto incrementale non sarebbe una funzione continua.

Formula di Cauchy per la derivata prima:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} \, dz$$

(niente dim.)

Formula di Cauchy per la derivata n-sima:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz$$

(niente dim.)

Osservazione 4.4.18 (legittimazione della derivazione sotto il segno di integrale).

Introduzione all'enunciato del teor. di Cauchy-Taylor:
Teorema di Cauchy-Taylor: se $f(z)$ è olomorfa in un intorno di a, allora nel più grande cerchio aperto contenuto in tale intorno la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

risulta convergente e in tale cerchio risulta:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Esistono funzioni reali che sono $C^\infty(\mathbb{R})$, ma non si possono sviluppare in serie di Taylor, in quanto tutti i coefficienti sono nulli (vd. 5.3.10).

24.10.2007 - mercoledì

Formula di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse.
(L'integrale è fatto sulla frontiera della regione, eventualmente costituita da più curve chiuse).

Dall'estensione del teorema di Torricelli si ha che la funzione integranda che compare nella definizione di funzione integrale non solo è continua, ma è derivabile con derivata continua, e quindi è olomorfa, e quindi ha tutte le derivate.

Di qui segue il teor. fondamentale del calcolo integrale: $\int_{z_0}^{z} f'(t)\ dt = f(z) - f(z_0)$.

Esempi da 4.4.4 a 4.4.7.
Calcolare l'integrale

$$\oint_C \frac{ze^z}{2-z}\ dz \qquad C = \{z : |z| = 10\}.$$

L'integrale vale il numeratore dell'integranda calcolato in $z = 2$, poi moltiplicato per $2\pi i$ e quindi cambiato di segno.
Si noti che il denominatore è $2 - z$, e non $z - 2$, e quindi giustamente va cambiato il segno.

Osservazione sulla media, quando il contorno è C ed a è il suo centro (*non vale* con un contorno qualsiasi, o se il punto a non è il centro).
Infatti in questo caso il contorno su cui si integra può essere parametrizzato dalla variabile reale θ che varia tra 0 e 2π. Il dz diventa pertanto $i\rho e^{i\theta}$.

Esercizi da 4.4.9 a 4.4.12.

Esercizio. - Trovare una funzione olomorfa che soddisfi, all'interno del cerchio $C = \{t : |t| = 4\}$,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad f''(z) = \frac{1}{\pi i}\oint_C \frac{t^3 - 2t + 5}{(t-z)^3}\ dt$$

Evidentemente la f e il numeratore della funzione integranda hanno la stessa derivata seconda; basta trovarla derivando due volte il numeratore e riintegrarla imponendo alle primitive successive di soddisfare le condizioni. (vd.

4.4.19; attenzione: non è specificato, ma è ovvio, che l'uguaglianza in cui compare f'' vale per z interno a C). Teorema della limitazione delle derivate successive:
Sia C una circonf. di centro z in una regione di olomorfia per f. Se $M(r) = \max_{t\in C} |f(t)|$ vale

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$$

(attenzione: per errore sul libro il centro è chiamato a.) Si scrive la formula di Cauchy per le derivate successive e si maggiora il modulo dell'integrale di $\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}$ con l'integrale del modulo e al denominatore viene
$|(t-z)^{n+1}| = r^{n+1}$, e $|dz| = ds$, per cui il 2π si semplifica.

Teorema di Liouville: *Una funzione olomorfa e limitata su tutto C è costante.*
Infatti la sua derivata prima risulta maggiorata in modulo da $\frac{M}{r}$ dove r può essere reso grande quanto si vuole, e quindi la derivata prima risulta nulla.

Esempio: il teor. fondamentale dell'algebra (il reciproco di un polinomio $\frac{1}{P(z)}$ tende a 0 per $z \to \infty$); se il polinomio non si annullasse mai il suo reciproco sarebbe una funzione olomorfa su tutto quanto $\mathbb{C}$, e sarebbe limitata (dentro ad un cerchio chiuso sarebbe limitata per il teor. di Weierstrass applicato alle sue componenti $u(x, y)$ e $v(x, y)$ e fuori del cerchio sarebbe in modulo minore di ϵ dato che tende a 0 per $z \to \infty$.

Esempio: calcolo delle soluzioni di $\sin z = 2$. Non limitatezza delle funzioni trigonometriche (vd. 2.3.12, 2.4.12, 2.4.13).

Richiami sulle serie, sulle serie di potenze; teorema di derivazione per successioni (teor. 5.1.4: *il limite delle derivate è la derivata del limite*).

Teorema di derivazione per serie per funzioni di variabile complessa (teor. 5.1.5: *la serie delle derivate è la derivata della serie.*
(niente dim.)

Oss. 5.1.6: se una serie di potenze è uniformemente convergente, può essere derivata termine a termine.

Serie di potenze, loro convergenza in un cerchio detto *cerchio di convergenza* e loro convergenza uniforme in ogni compatto contenuto nel cerchio di convergenza (teor. 5.1.9).

Serie geometrica di ragione z e sua convergenza nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

(Attenzione: nella formula successiva alla (5.1.3) è scritto per errore $1-z^k$ invece che $1-z^{k+1}$.) Deve essere

$$\sum_{n=0}^{k} z^n = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$$

e se $|z|<1$ il limite per $k\to\infty$ è proprio $\frac{1}{1-z}$.

La serie geometrica sviluppata in un intorno del punto $z=a$: $\frac{1}{1-z}$ si aggiunge e toglie a al denominatore: $1-a-(z-a)$ e si divide per $1-a$, per cui la funzione si può scrivere come serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n$$

e questa serie converge dove $|z-a|<|1-a|$.

Sviluppo di $f(z)=\frac{1}{z}$ in un intorno del punto $z=a$ (dove è olomorfa). Al denominatore aggiungo e tolgo a, e poi metto in evidenza a, e il denominatore resta $1+\frac{z-a}{a}$ che quindi dà la serie geometrica di ragione $-\frac{z-a}{a}$, che converge per $|z-a|<|a|$.

25.10.2007 - giovedì

Criterio del rapporto: se c'è il limite del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$, il raggio di convegenza è $1/\ell$.

Teorema di Cauchy-Taylor: se $f(z)$ è olomorfa in un intorno di a, allora nel più grande cerchio aperto contenuto in tale intorno la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

risulta convergente e in tale cerchio risulta:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Infatti si scrive la formula di Cauchy per la $f(z)$, dove al denominatore dell'integranda compare $t-z$ e l'integrale è fatto in dt. Poi ci si occupa dell'integranda e il denominatore, che è $t-z$ lo si scrive $t-a+a-z$; poi si mette in evidenza $t-a$ e resta la frazione

$$\frac{f(t)}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}}$$

Tale ultima frazione si può scrivere sotto forma di serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n$
Tornando alla formula di Cauchy e integrando termine a termine si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(t)}{t-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n dt = \text{ (integrando per serie) } =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt\right](z-a)^n.$$

cioè l'asserto, perché quegli integrali sono proprio le derivate divise per il fattoriale corrispondente.

Definizione di *funzione analitica* (5.2.3).

Le funzioni olomorfe in una regione Ω sono analitiche, quindi $C^\omega(\Omega) = H(\Omega)$.

Lo sviluppo di Cauchy-Taylor è unico (5.2.4).
(niente dim.)

Sviluppi di funzioni note (5.2.7- 5.2.13), con ripresa della serie geometrica e della funzione $1/z$.

Sviluppo di $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \ldots$

Principio di identità per le funzioni analitiche: se sono uguali su una sottoregione sono uguali sull'intera regione.
(niente dim.)

Richiamo e analogia (fino a un certo punto) con il principio di identità dei polinomi (oss. 5.3.2).

Definizione di ordine di uno zero: di ordine k se sono nulli i suoi coefficinti fino a quello di posto $k-1$, mentre $a_k \neq 0$. (5.3.2-5.3.4; attenzione: nella def. 5.3.3 è scritto per errore "i primi $k-1$ coefficienti", mentre poi sono giustamente indicati i primi k).

Teorema degli zeri di una funzione analitica non identicamente nulla: sono isolati.

Dim. $f(z) = (z-a)^k g(z)$, dove $g(z)$ è il resto della serie, che comincia con il coefficiente $a_k \neq 0$. Allora $(z-a)^k$ si annulla solo in a, mentre $g(z)$ *non si annulla* in un intorno abbastanza piccolo di a.

26.10.2007 - venerdì

Principio forte di identità: se coincidono su due insiemi che hanno punto di accumulazione in Ω coincidono su tutto Ω (con dim.).

Funzioni reali che non possono essere restrizioni di funzioni analitiche (già visto precedentemente: 5.3.10).

Prolungamento analitico (5.4.1-5.4.6).

Dimostrare che le tre funzioni

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} z^k, \qquad f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-z}\right)^k, \qquad f_3(z) = \frac{z}{1-2z}$$

sono i prolungamenti della stessa funzione ad insiemi diversi (5.4.12).

Formula di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse (cenno; attenzione: nella formula 4.4.12 il denominatore dell'integranda è scritto per errore $z-a$ mentre deve essere $(z-a)^{n+1}$).

Teor. di Cauchy-Laurent (solo accenno della dim.)
I coefficienti sono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt; \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{-n+1}}\, dt$$

Residuo e *parte principale*

Sviluppi elementari (5.6.7; 5.6.8; 5.6.10).

$f(z) = \dfrac{1}{3z^2+z} =$ si mette in evidenza z al denominatore, e poi è una serie geometrica...

Esercizi proposti (pp. 152-153, salvo i n$^{\mathrm{i}}$ 6 e 8).

Punti singolari isolati: singolarità eliminabili, polari, essenziali e loro caratteristiche geometriche.

****

Non fanno parte del programma d'esame: dim. di 4.3.10; dim. di 4.4.13; dim. di 4.4.15; 4.4.16; 4.4.17; 4.5.1; 4.5.3; dim. di 4.5.4; 4.5.6; dim. di 5.1.5; dim. di 5.2.4; 5.2.12; 5.2.14; 5.2.15; 5.2.16; dim. di 5.3.1; 5.3.6; 5.3.7; 5.3.13; da 5.4.7 a 5.4.11 compresi; da 5.4.14 a 5.4.21 compresi; da 5.4.23 a 5.5.2; dim. di 5.6.1; 5.6.4; 5.6.9; 5.6.11; 5.6.12; 5.6.13; es. 6 ed es. 8 di p. 153; dim. di 6.1.4; dim. di 6.1.11.