Settima settimana
13.11.2007 - martedì

Visione e commento della prova parziale.

Ripresa delle trasformazioni integrali e del concetto di nucleo.
Introduzione alla trasformata di Fourier: teoremi sulla limitatezza (3.5.4), la tendenza a zero per $\omega \to \infty$ (3.5.1, con dim.), sulla continuità uniforme (3.5.2, senza dim.).
Traslazioni nel tempo e in frequenza (3.5.5)

Accenno alle funzioni assolutamente continue come funzioni per le quali vale il teor. fond. del calcolo integrale. Accenno alla funzione di Cantor (p. 39) e alla numerosità dell'insieme di Cantor (che è quello che resta quando dall'intervallo [0,1] si sono eliminati tutti i sottointervalli nei quali la funzione di Cantor ha andamente costante).

Trasformata della derivata (3.5.7, con dim.)

14.11.2007 - mercoledì

Osservazione sulla rapidità della tendenza a zero e sull'importanza della trasformata di Fourier come operazione che trasforma un operatore differenziale in un operatore polinomiale (3.5.8, 3.5.9).

Calcolo esplicito della $\mathcal{F}(e^{-|t|})$ (3.4.13).

Trasformate trigonometriche (3.4.9).

Prodotto di convoluzione, sua sommabilità; teorema sulla trasformata del prodotto di convoluzione (3.6). Menzione del teor. di Fubini-Tonelli sull'invertibilità dell'ordine di integrazione e sull'uguaglianza tra integrale doppio e integrale iterato.

Campionamento; grafico delle sinusoidi smorzate (3.7). Teorema di Shannon.

Introduzione alla trasformata di Laplace.

15.11.2007 - giovedì

Richiami di notazioni in uso in matematica (e quindi nel libro di testo) riguardanti gli integrali e teoremi appartenenti a programmi precedenti (e quindi non richiamati nel libro di testo perché considerati noti).

Distinzione tra gli integrali di una funzione che ha integrale su una semiretta qualunque sia la successione di intervalli che la invade e invece

$$\lim_{K\to\infty} \int_0^K f(x)\ dx$$

che considera il limite su quella successione particolare di intervalli invadente la semiretta che cominciano sempre da 0 e terminano a k.

In generale, un integrale su un insieme su cui una funzione *non* è continua, oppure su un insieme non limitato, calcolato come limite di integrali fatti su una successione invadente tale insieme, si dice *integrale improprio* e il suo valore si dice *valore principale (di Cauchy)* e davanti al segno di integrale si scrive "v.p." per indicare che l'integrale è stato calcolato come limite di integrali fatti su una successione particolare. Un esempio è l'integrale di $\frac{1}{x}$ fatto come limite di integrali calcolati su successioni di coppie di intervalli *simmetrici rispetto all'origine*. Ovviamente, come per tutte le funzioni dispari, il suo valore principale 'e nullo. Un altro esempio, che interessa la $\mathcal{L}$-trasformata, è l'integrale dato come $\lim_{K\to\infty} \int_0^K f(t)\ e^{-st}\ dt$. A volte, per insistere che si tratta di quel tipo di integrale, invece che scrivere $\lim_{K\to\infty} \int_0^K f(t)\ e^{-st}\ dt$ si antepone una piccola freccia e si scrive:

$$\vec{\int_0^\infty} f(t)\ e^{-st}\ dt.$$

Valgono i seguenti teoremi:

I) Una funzione sempre positiva (o nulla) ha integrale (finito oppure $+\infty$) indipendente dalla successione.

II) Una funzione ha integrale finito indipendente dalla successione se e solo se il suo modulo $|f(x)|$ ha integrale finito (L'integrale del modulo, stante il teor. precedente, è indipendente dalla successione).
Naturalmente ciò riguarda la finitezza oppure no degli integrali; il loro*valore*, se la f non è sempre dello stesso segno,*è chiaramente diverso.*

Ovviamente, se una funzione ha integrale finito *indipendente dalla successione*, il calcolo viene poi effettuato su una particolare successione "comoda", che molto spesso è proprio la successione di intervalli simmmetrici rispetto ad un punto di non continuità o, sulla retta, la successione degli intervalli simmetrici $[-K, K]$, o, sulla semiretta, la successione degli intervalli $[0, K]$. Poiché il calcolo viene sempre effettuato così, nella pratica ingegneristica viene perduto il senso della eventuale dipendenza dell'integrale dalla successione invadente e viene chiamato tranquillamente "integrale" quello che è invece il valore principale.

Ovviamente, stante il teor. I), una funzione che ha integrale su una retta (o semiretta) dipendente dalla successione invadente la retta (o semiretta) può essere solo una funzione di segno variabile. L'unica che abbiamo incontrato di questo tipo è la sinusoide smorzata $\frac{\sin t}{t}$ il cui integrale non esiste finito (l'integrale del modulo risulta $+\infty$), ma il cui valore principale fatto come limite per $K \to \infty$ degli integrali sulla successione di intervalli $[0, K]$ è invece finito (vale $\frac{\pi}{2}$).

Noi considereremo solo la *trasformata assoluta* di Laplace, cioè la trasformata di quelle funzioni per le quali esiste finito l'integrale del modulo (def. 4.1.11, p. 168) e tutte le volte che parleremo di "integrale" intenderemo, a meno che non sia specificato altrimenti, l'integrale effettivo, non semplicemente il valore principale.

Definizione dello spazio $L_{loc}\mathbb{R}_0^+$.

Definizione di trasformabilità assoluta (4.1.11) e di trasformata assoluta (4.1.14). Si noti la possibilità (che noi applicheremo sempre) di omettere l'aggettivo "assoluta".

Esistenza della trasformata (assoluta) in un semipiano (enunciato del teor. 4.1.12), che si dirà *semipiano di convergenza.*

Ascissa di convergenza (assoluta), indicata con ρ (4.1.15).

Calcolo della $\mathcal{L}$-trasformata della funzione di Heaviside (funzione "gradino"), dell'esponenziale e^{kt}, delle funzioni seno e coseno come combinazioni lineari di esponenziali (tali trasformate sono anche assolute, quindi non viene evidenziata differenza).

Uniforme convergenza dell'integrale di Laplace su un angolo convesso del suo semipiano di convergenza (teor. 4.2.1, dove ρ^* è da intendersi l'ascissa di convergenza assoluta ρ).

Tendenza a 0 della trasformata entro un angolo convesso (4.2.7, senza dim.)

Tendenza a 0 di $\frac{[\mathcal{L}(f)](s)}{s}$ sulle rette verticali (4.2.10).

16.11.2007 - venerdì

Trasformabilità delle funzioni $\mathcal{O}(e^{kt})$, $\mathcal{O}(t^k)$. Trasformabilità dei polinomi (4.2.6).

Esempio di funzione pur localmente sommabile che non ha trasformata di Laplace per nessun valore di s (4.1.8).

Esistenza dell'integrale di Laplace per tutte le funzioni sommabili (e non soltanto localmente sommabili), e tendenza a zero di tale integrale per tutti gli s con Re(s)≥ 0 (4.2.8, 4.2.9).

Prima formula fondamentale e olomorfia della $\mathcal{L}$-trasformata (4.2.12)

$$[\mathcal{L}(f)]^n = (-1)^n \mathcal{L}(t^n\ f(t))$$

Confronto con la trasformata di Fourier riguardo alla derivabilità e tendenza a zero.

Trasformata di $\frac{f(t)}{t}$:

$$\mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big) = \int_s^\infty [\mathcal{L}(f)](\sigma)\ d\sigma$$

Traslazione in s e traslazione in t.

Cambiamento di scala. (4.3.3).

Esempio 4.3.4 (salvo la formula (4.3.4).

Esempio 4.3.5 (trasformata di una differenza di esponenziali fratto t). Considerazioni sulla possibile non esistenza delle trasformate dei singoli addendi.

Trasformata di una funzione periodica (4.3.7, senza dim.)

****

Non fanno parte del programma d'esame: a partire dal Cap. 3 del II vol.: 3.1; 3.2; 3.4.5; 3.4.6; 3.4.7; 3.4.10; 3.4.11; la pag. 138; 3.5.6; da 3.5.10 a 3.5.14; § 3.8; § 3.9; esercizi proposti del Cap. 3: 3, 8, 9, 10, 11; da 4.1.2 a 4.1.7; dim. di 4.1.12; 4.1.13; 4.1.16 a partire dall'ottava riga; le formule di (4.1.26) a (4.1.29); 4.1.22; dim. di 4.2.1;dim. di 4.2.4; dim. di 4.2.5; dim.

di 4.2.7; dim. di 4.2.12; 4.2.18 salvo (4.2.29); 4.2.19, dim. di 4.3.2, formula (4.3.4); dim. di 4.3.7.