

COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Prova parziale del 7.11.2007

Tempo concesso: 90 minuti

Tema A

1. Si definisca la funzione *potenza* nel campo complesso; dire quando questa funzione è univoca, plurivoca con un numero finito di valori, plurivoca con un numero infinito di valori.
2. Si esponga il problema della migliore approssimazione in norma, e si dica in quali spazi esso ha certamente soluzione, e quale è questa soluzione.
3. Trovare l'immagine della funzione e^z e in particolare le immagini delle rette parallele agli assi.
4. Risolvere nel campo complesso l'equazione $\sin z = 4$.
5. Sullo spazio $C^0([-\pi, \pi])$ abbiamo considerato tre norme: quella che gli è propria e quelle che sono indotte dagli spazi $L^2([-\pi, \pi])$ e $L([-\pi, \pi])$ che contengono $C^0([-\pi, \pi])$. Presentare singolarmente le tre norme, proponendo anche qualche esempio di successione che converge secondo una di queste ma non secondo le altre.
6. Si richiami il concetto di densità in uno spazio metrico e lo si trasporti poi ad uno spazio vettoriale normato.
In che dimostrazione è stato sfruttato il fatto che $C^1([a, b])$ è denso in $L^1([a, b])$?

7. Si dica perché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx;$$

è una serie di Fourier e perché se ne può effettuare la derivazione per serie.

8. La funzione $f(z) = |z|$ è olomorfa in qualche regione di \mathbb{C} ? Perché?
9. Si illustri il motivo per cui una funzione reale, definita sui reali, infinitamente derivabile, che vale 0 sulla semiretta $[0, +\infty)$ non può essere la restrizione ai reali di una funzione analitica su \mathbb{C} .