

## COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Prova parziale del 7.11.2007

Tempo concesso: 90 minuti

**Tema C**

1. Si definisca una *funzione armonica*. Perché le componenti di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche?
2. Si dia un esempio di funzione integrabile sull'intervallo  $[-1, 1]$ , ma non a quadrato integrabile su tale intervallo, e un esempio di una funzione a quadrato integrabile sulla semiretta  $[1, +\infty)$ , ma *non* integrabile su tale semiretta.
3. Si dimostri che se uno spazio metrico  $A$  è denso in uno spazio metrico  $B$  e questo è denso in uno spazio metrico  $C$ , allora  $A$  è denso in  $C$ .
4. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx;$$

converge puntualmente in  $[-\pi, \pi]$ ? Converge uniformemente? È una serie di Fourier? Se ne può effettuare la derivazione per serie? Giustificare le risposte.

5. Scrivere la formula di Cauchy, in cui compare un integrale funzione di un punto  $a$ . Per quali valori di  $a$  essa vale? Che valore ha l'integrale a seconda di dove si trova  $a$ ?
6. Si dia la definizione di olomorfia in una regione  $\Omega$  per una funzione di variabile complessa. Le condizioni di Cauchy-Riemann sono necessarie per l'olomorfia in una regione? sono sufficienti?
7. Definire una curva regolare, il suo orientamento, una forma differenziale e l'integrale di una forma differenziale su una curva.
8. Si enunci il teor. di Jordan per le curve piane.
9. Si scriva la serie generica di Cauchy-Laurent in una corona circolare con centro un punto di non olomorfia. Si classifichino i tipi di singolarità dando per ciascuno di essi un esempio.