

COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Esercitazione del 28.11.2007

Vengono proposti più esercizi per ogni tipo. Nella prova parziale verranno proposti circa dieci esercizi di tipo diverso. Gli altri sono per esercitarsi.

1. a) Si definisca la trasformata di Laplace (assoluta): ambito delle funzioni a cui si può applicare.  
 b) Tutte le funzioni di  $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$  hanno trasformata da Laplace?  
 c) “La trasformata di Laplace è una famiglia di trasformate di Fourier”. Cosa significa questa frase sintetica?
2. a) *Larghezza di banda e larghezza convenzionale di banda*: se ne descriva la relazione con il teorema del campionamento.  
 b) Si scriva la formula di Shannon e si facciano i grafici delle funzioni che vi compaiono. Sotto quali ipotesi si ha la ricostruzione del segnale senza errore di *aliasing*?
3. Si scriva la formula della trasformata di Fourier della derivata e si metta in relazione la derivabilità di  $f$  con la tendenza a 0 della sua trasformata. C'è qualcosa di analogo con la tendenza a 0 dei coefficienti di Fourier?
4. La trasformata di Fourier gode di varie proprietà (ad es. tendenza a zero, continuità, ...). Se ne enunci qualcuna, eventualmente dimostrandola. Una trasformata di Fourier è sempre sommabile su  $\mathbb{R}$ ?
5. Prodotto di convoluzione in  $\mathbb{R}$  e in  $\mathbb{R}_0^+$ : definizioni e differenze.
6. Data la soluzione di un'equazione differenziale presentata sotto la forma  $y = h + f * g$  si dica cosa indicano le singole funzioni  $f$ ,  $g$ ,  $h$ .
7. Scrivere la formula di inversione della  $\mathcal{L}$ -trasformata, e spiegare intuitivamente perché non c'è contraddizione se in un membro appare una variabile che non appare nell'altro.
8. Il concetto espresso dall'avverbio “uniformemente” è stato incontrato più volte (continuità, convergenza). Se ne presentino alcuni casi, con le relative definizioni ed eventualmente spiegazioni grafiche.
9. Si faccia un esempio di funzione appartenente allo spazio  $\mathcal{D}$  e si dica perché essa non può essere la restrizione ad  $\mathbb{R}$  di una funzione olomorfa. Si esponga quindi la convergenza nello spazio  $\mathcal{D}$  e si dica cosa significa che un funzionale è continuo su  $\mathcal{D}$ .
10. Si dica quali tra le seguenti funzioni olomorfe non sono trasformate di Laplace, dicendo il perché, e invece per quelle che lo sono si trovino le rispettive ascisse di convergenza e le funzioni di cui esse sono trasformate:

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2 - 9}; \quad F_2(s) = \frac{s}{s - 4}; \quad F_3 = \frac{-1}{s^2}; \quad F_4(s) = \frac{2}{s^2 - 4s + 4}$$

11. La distribuzione  $\delta_{(a)}$  è la traslata in  $a$  della distribuzione di Dirac. Quale è la sua definizione?
12. Si scriva la formula della trasformata di Laplace di  $f^{(n)}$ , specificando sotto quali ipotesi essa è valida.
13. L'ascissa di convergenza (assoluta) è
- un numero necessariamente reale;
  - un numero, eventualmente anche complesso;
  - una retta del piano complesso.
14. a) Si risolva l'equazione  $y' - 2y = e^{2t} + t$  sia con il metodo della  $\mathcal{L}$ -trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
- b) Si risolva l'equazione  $y'' - 2y' = e^t$  sia con il metodo della  $\mathcal{L}$ -trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
- c) Si risolva l'equazione  $y' - y = \sin t$  sia con il metodo della  $\mathcal{L}$ -trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
15. a) Enunciare e dimostrare il teorema del cambiamento di scala per la  $\mathcal{L}$ -trasformata.
- b) Esporre i teoremi di traslazione in  $s$  e in  $t$  per la trasformata di Laplace.
- c) Calcolare la  $\mathcal{L}$ -trasformata di

$$f(t) = t \int_0^{4t} \frac{e^u - e^{2u}}{u} du$$

precisando i teoremi utilizzati e le ascisse di convergenza che si vanno configurando nei singoli passaggi.

16. Calcolare

$$\mathcal{L} \left( \int_0^{2t} \frac{\sin 3u}{2u} du \right)$$

precisando i teoremi utilizzati e le ascisse di convergenza che si vanno configurando nei singoli passaggi.

17. Si risolva, tramite la  $\mathcal{L}$ -trasformata, il problema integro-differenziale

$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

Si derivino poi ambo i membri dell'equazione e si risolva l'equazione differenziale che ne deriva. Quale condizione sulla derivata prima bisogna imporre se si vuole giungere alla stessa soluzione?

18. Si verifichi la validità del teorema sulla  $\mathcal{L}$ -trasformata del prodotto di convoluzione calcolando  $\mathcal{L}(e^t * e^t)$ .

- 
19. Si definisca la derivazione nel senso delle distribuzioni, e poi si calcoli quale distribuzione è la derivata della (distribuzione associata alla) funzione  $f(x) = |x|$ .
  20. Calcolare  $\int_0^{+\infty} e^{-3t} t^2 \sin t \, dt$ .  
Si può calcolare con lo stesso metodo  $\int_0^{+\infty} e^{3t} t^2 \sin t \, dt$ ? Perché?
  21. Esporre sinteticamente il procedimento per il quale la trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier dei fattori.
  22. In quale insieme la trasformata di Laplace tende a 0 per  $s \rightarrow \infty$ ? e la derivata di una trasformata di Laplace tende a 0 per  $s \rightarrow \infty$  nello stesso tipo di insieme?
  23. La trasformata di Laplace non tende necessariamente a 0 per  $s \rightarrow \infty$  su una retta verticale. Che cosa invece tende necessariamente a 0 su tali rette?
  24. Nella trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione intervengono ascisse di convergenza; si dica quale è l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace del prodotto rispetto a quella delle trasformate dei singoli fattori.
  25. Si dia la definizione di funzionale continuo sullo spazio  $\mathcal{D}$ , descrivendo la convergenza in tale spazio. Dimostrare quindi che la  $\delta$  è un funzionale continuo su  $\mathcal{D}$ .
  26. Cosa significa che lo spazio delle distribuzioni è uno spazio completo? Rispetto a quale convergenza?
  27. Si dia la definizione di derivata di una distribuzione e si verifichi che, nel caso delle distribuzioni di tipo  $T_f$  tale definizione rispetta il teor. di integrazione per parti.
  28. Si dia la definizione di prodotto tra una distribuzione e una funzione  $\alpha$ . A quale spazio deve appartenere la funzione?  
Verificare che la derivazione di tale prodotto riproduce la regola di derivazione del prodotto tra funzioni.