COMPLEMENTI DI MATEMATICA
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica
Esercitazione del 28.11.2007
Abbozzo di soluzioni - I numeri si riferiscono al testo (vol. II)

1. a) Si definisca la trasformata di Laplace (assoluta): ambito delle funzioni a cui si può applicare.
   b) Tutte le funzioni di $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ hanno trasformata da Laplace?
   c) "La trasformata di Laplace è una famiglia di trasformate di Fourier". Cosa significa questa frase sintetica?
   Sol. - a) La L-trasf. (assoluta) è definita in 4.1.11; non tutte le funzioni di $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ hanno trasformata di Laplace: un controesempio è in 4.1.8: la funzione lì citata non ha trasformata di Laplace (e quindi ancor meno ce l'ha assoluta). La frase in c) è spiegata in 4.9.7: ogni volta che si fissa un x, la trasformata di Fourier (se esiste) della funzione $f(t)e^{-xt}$ è la restrizione alla retta verticale del piano complesso di ascissa x della L-trasformata di f. Al variare di x si ottiene la trasformata di Laplace della f. In particolare, se l'asse degli immaginari appartiene al semipiano di convergenza, la restrizione a tale asse coincide con la trasf. di Fourier di $f(t)e^0$ e quindi proprio della f

2. a) *Larghezza di banda* e *larghezza convenzionale di banda*: se ne descriva la relazione con il teorema del campionamento.
   b) Si scriva la formula di Shannon e si facciano i grafici delle funzioni che vi compaiono. Sotto quali ipotesi si ha la ricostruzione del segnale senza errore di *aliasing*?
   Sol. - La larghezza di banda è definita in 3.7.1; in 3.7.2 è definita la larghezza convenzionale, che considera nulla la banda al di fuori di un certo intervallo, quando il suo modulo sia minore di un ventesimo del massimo del modulo della F-trasf. Esiste certamente un intervallo al di fuori del quale la F-trasf. ha modulo piccolo, perché tende a 0 per $\omega \to \infty$ (vd. 3.5.1). Il campionamento deve essere abbastanza fitto (almeno di periodo $\frac{k\pi}{\omega_0}$ dove ω_0 è la larghezza di banda) per evitare errori di aliasing.

3. Si scriva la formula della trasformata di Fourier della derivata e si metta in relazione la derivabilità di f con la tendenza a 0 della sua trasformata. C'è qualcosa di analogo con la tendenza a 0 dei coefficienti di Fourier?
   Sol. - La formula è la (3.5.7) a p. 140; la relazione tra la derivabilità e la tendenza a 0 è l'oss. 3.5.8; la parentela con analoga proprietà della rapidità della tendenza a 0 dei coefficienti di Fourier è nel teor. 2.7.4 di p. 102. L'intero paragrafo 2.7 non fa parte del programma d'esame, però la proprietà espressa nelle formule (2.7.4) era stata genericamente accennata (senza enunciazione delle ipotesi).

4. La trasformata di Fourier gode di varie proprietà (ad es. tendenza a zero, continuità, ...). Se ne enunci qualcuna, eventualmente dimostrandola.
   Una trasformata di Fourier è sempre sommabile su $\mathbb{R}$?

Sol. - Una qualsiasi tra le 3.5.1 (anche dimostrata), 3.5.2, 3.5.4, 3.5.5, 3.5.7, 3.6.1 (anche sommariamente dimostrata). Non tutte le trasformate di Fourier sono sommabli in $\mathbb{R}$, vd. 3.8.3.

5. Prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}_0^+$: definizioni e differenze.
   Sol. - Vd. 3.6.1, 3.6.2, 4.4.1, 4.4.2; la differenza è messa in evidenza dal fatto che l'integrale di convoluzione in $\mathbb{R}_0^+$ va solo fino a t (e parte da 0).

6. Data la soluzione di un'equazione differenziale presentata sotto la forma $y = h + f * g$ si dica cosa indicano le singole funzioni $f,\ g,\ h$.
   Sol. - Abbiamo sviluppato soprattutto quanto scritto in 3.8.4; di cosa siano antitrasformate la g e la h sta nella formula (4.8.15) e nelle due successive; la convoluzione $f * g$ è la soluzione dell'eq. diff. quando $y_0 = y_1 = 0$; la h è soluzione della omogenea.

7. Scrivere la formula di inversione della $\mathcal{L}$-trasformata, e spiegare intuitivamente perché non c'è contraddizione se in un membro appare una variabile che non appare nell'altro.
   Sol. - Vd. formula (4.10.4); una spiegazione intuitiva è in un commento della fig. 4.13 a p. 203 (ricordiamo l'olomorfia di $\mathcal{L}(f)$ e quindi anche di $\mathcal{L}(f)e^{-st}$ come funzione di s) e che il punto all'infinito su due rette parallele è uno solo.

8. Il concetto espresso dall'avverbio "uniformememnte" è stato incontrato più volte (continuità, convergenza). Se ne presentino alcuni casi, con le relative definizioni ed eventualmente spiegazioni grafiche.
   Sol. - L'uniforme continuità è esposta, (soltanto per quanto riguarda la F-trasf.) nella formula (3.5.2) del teor. 3.5.2 , dove la disuguaglianza vale *indipendentemente* da ω. Sulla convergenza uniforme delle serie (di Fourier) vd. 2.5.7, dove appunto la maggiorazione (2.5.2) non dipende da dove si trova il punto x. La convergenza uniforme di successioni di funzioni si trova anche nella definizione della convergenza nello spazio delle funzioni test (5.1.5). Sulla convergenza dell'integrale di Laplace vd. formula (4.2.1) dove appunto la maggiorazione con lo stesso T_ϵ vale $\forall s \in A(s, \theta_0)$.

9. Si faccia un esempio di funzione appartenente allo spazio $\mathcal{D}$ e si dica perché essa non può essere la restrizione ad $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa. Si esponga quindi la convergenza nello spazio $\mathcal{D}$ e si dica cosa significa che un funzionale è continuo su $\mathcal{D}$.
   Sol. - Vd. 5.1.4; il grafico della funzione lì citata si trova nel vol. I come funzione che vale 0 su un compatto e nei punti in cui si distacca dallo 0 ha però le derivate tutte nulle e quindi non è esprimibile tramite una serie di McLaurin, che invece darebbe la funzione nulla. Grafici di quel tipo sono anche in fig. 5.1, p. 257. La convergenza in $\mathcal{D}$ è in 5.1.5. Una volta che si sia definita la convergenza in $\mathcal{D}$ si può definire la continuità di un funzionale su tale spazio; vd. 5.1.7 (noi abbiamo sempre considerato spazi vettoriali su $\mathbb{R}$).

10. Si dica quali tra le seguenti funzioni olomorfe non sono trasformate di Laplace, dicendo il perché, e invece per quelle che lo sono si trovino le rispettive ascisse di convergenza e le funzioni di cui esse sono trasformate:
$$F_1(s) = \frac{s}{s^2-9}; \quad F_2(s) = \frac{s}{s-4}; \quad F_3 = \frac{-1}{s^2}; \quad F_4(s) = \frac{2}{s^2-4s+4}$$
Sol. - Ovviamente la F_2 non può essere una L-trasf. perché non tende a 0 per $s \to \infty$; la F_1 lo è di $\cosh 3t$, F_3 di $-t$, F_4 di $2te^{2t}$ (si ricordi il teorema sulla traslazione in s).

11. La distribuzione $\delta_{(a)}$ è la traslata in a della distribuzione di Dirac. Quale è la sua definizione?
Sol. - Vd. 5.1.14.

12. Si scriva la formula della trasformata di Laplace di $f^{(n)}$, specificando sotto quali ipotesi essa è valida.
Sol. - Teor. 4.5.5, formula (4.5.10).

13. L'ascissa di convergenza (assoluta) è
a) un numero necessariamente reale;
b) un numero, eventualmente anche complesso;
c) una retta del piano complesso.
Sol. - Un numero necessariamente reale, perché è l'ascissa del punto di incrocio tra la retta di convergenza e l'asse reale.Vd. 4.1.15.

14. a) Si risolva l'equazione $y' - 2y = e^{2t} + t$ sia con il metodo della $\mathcal{L}$-trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
Sol. - Ricordiamo che se il secondo membro è una somma di funzioni $f_1 + f_2$ un suo integrale particolare è la somma di due integrali particolari delle due equazioni aventi come secondo membro f_1 ed f_2 rispettivamente. Pertanto con il metodo standard devo trovare un integrale particolare dell'eq. $y' - 2y = e^{2t}$ e uno dell'eq. $y' - 2y = t$ e poi sommarli. Inoltre ricordiamo che se λ è una soluzione dell'equazione caratteristica, allora per trovare un integrale particolare di $y' - 2y = e^{\lambda t}$ bisogna provare con le funzioni $\overline{y} = Ate^{\lambda t}$.
Sol. - Il metodo standard ha come eq. caratt. $\lambda - 2 = 0$ e quindi l'integrale generale della omogenea è $y = ce^{2t}$; per un integrale particolare dell'eq $y' - 2y = e^{2t}$ cerchiamo $\overline{y} = Ate^{2t}$ che, sostituita nell'equazione diff., dà $A = 1$. Cerchiamo ora un integrale particolare di $y' - 2y = t$ ponendo $\overline{y} = Bt + C$, che sostituito nell'eq diff. $y' - 2y = t$ dà $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{4}$. Pertanto un integrale particolare della non omogenea complessiva è $te^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$. L'integrale generale della non omogenea risulta quindi
$$y = ce^{2t} + te^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

Ponendo la condizione iniziale, ad esempio, per semplicità $y(0) = 0$ otteniamo $c - \frac{1}{4} = 0$ da cui $c = \frac{1}{4}$, e quindi la soluzione è

$$y = \frac{1}{4}e^{2t} + te^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

Il metodo della trasformata di Laplace ci fornisce subito:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s^2(s-2)}$$

Antitrasformando, il primo termine fornisce subito te^{2t}; il secondo può essere calcolato in due modi: o vedendolo come il prodotto di due trasformate di Laplace e quidi effettuando la convoluzione $t * e^{2t}$, oppure scomponendo la frazione nel seguente modo:

$$\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s-2}$$

In questo secondo caso risulta $A = -1/4,\ B = -1/2,\ C = 1/4$ il che porta allo stesso risultato; effettuando il prodotto di convoluzione che risulta $\int_0^t \tau\ e^{2(t-\tau)}\ d\tau$ si ottiene lo stesso risultato complessivo.
b) Si risolva l'equazione $y'' - 2y' = e^t$ sia con il metodo della $\mathcal{L}$-trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
Sol. - Analogo al precedente; l'equazione caratteristica risulta $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ e quindi l'integrale generale risulta $y = c_1 + c_2e^{2t}$. Un integrale particolare si ottiene come $\overline{y} = Ae^t$, e sostituendo nell'equazine si ottiene $A = -1$. Si prenda per comodità $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ e si trovano le costanti c_1 e c_2. Il metodo della L-trasf.con le stesse condizioni iniziali porge

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s-2)^2}$$

da cui $y = 1 * (te^{2t})$ il che porta allo stesso risultato.
c) Si risolva l'equazione $y' - y = \sin t$ sia con il metodo della $\mathcal{L}$-trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
Sol. - Si risolvono come i due casi precedenti (l'integrale generale della omogenea è ce^t, ricordando che un integrale particolare della non omogenea si ottiene come combinazione lineare $c_1 \cos t + c_2 \sin t$). Utilizzando il metodo della L-trasf. si deve effettuare la convoluzione $\sin t * e^t$.

15. a) Enunciare e dimostrare il teorema del cambiamento di scala per la $\mathcal{L}$-trasformata.
b) Esporre i teoremi di traslazione in s e in t per la trasformata di Laplace.
Sol. - Entrambe le risposte sono ai §§ 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3.

c) Calcolare la $\mathcal{L}$-trasformata di

$$f(t) = t \int_0^{4t} \frac{e^u - e^{2u}}{u} \, du$$

precisando i teoremi utilizzati e le ascisse di convergenza che si vanno configurando nei singoli passaggi.
Sol. - Dapprima si calcola la trasformata dell'integrale da 0 a t (es. 15, p. 246, con soluz. a p. 315), poi si fa un cambiamento di scala (perché l'integrale va a $4t$ e non semplicemente a t, e poi si deriva una volta. L'ascissa di conv. è sempre 0 in tutti i passaggi.

16. Calcolare
$$\mathcal{L}\left(\int_0^{2t} \frac{\sin 3u}{2u} \, du\right)$$
precisando i teoremi utilizzati e le ascisse di convergenza che si vanno configurando nei singoli passaggi.
Sol. - Come l'es. 16, p. 246, soluz. a p. 315, solo che in fondo si applica il cambiamento di scala, e invece non si deriva.

17. Si risolva, tramite la $\mathcal{L}$-trasformata, il problema integro-differenziale
$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(\tau) \, d\tau \\ y(0) = -3 \end{cases}$$
Si derivino poi ambo i membri dell'equazione e si risolva l'equazione differenziale che ne deriva. Quale condizione sulla derivata prima bisogna imporre se si vuole giungere alla stessa soluzione?
Sol. - Uguale al 4.12.12, nonché all'es. 71, p.250, soluz. a p. 321, che spiega anche perché, derivando ed avendo come risultato $y''(t) = y(t)$ la condizione che deriva è $y'(0) = 0$.

18. Si verifichi la validità del teorema sulla L-trasformata del prodotto di convoluzione calcolando $\mathcal{L}(e^t * e^t)$.
Sol. - Es. 47, soluz. a p. 319.

19. Si definisca la derivazione nel senso delle distribuzioni, e poi si calcoli quale distribuzione è la derivata della (distribuzione associata alla funzione $f(x) = |x|$.
Sol. - Def. 5.2.1; esempio 5.2.9.

20. Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-3t} t^2 \sin t \, dt$.
Si può calcolare con lo stesso metodo $\int_0^{+\infty} e^{3t} t^2 \sin t \, dt$? Perché?
Sol. - Si tratta della L-trasf. di $t^2 \sin t$ calcolata nel punto $s = 3$, e quindi analogo all'es. 4.8.2 e all'es. 12 di p. 245, con soluz. a p. 314, solo che bisogna derivare una seconda volta. Non si può cacolare il secondo integrale perché analogamente dovrebbe essere la L-trasf nel punto $s = -3$ dova la L-trasf. non esiste.

21. Esporre sinteticamente il procedimento per il quale la trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier dei fattori.
    Sol. - Vd. 3.6.4; il teor. di Fubini garantisce che in questo caso l'integrale iterato (fatto prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra) è uguale all'integrale doppio, e quindi si può scambiare l'ordine di integrazione.

22. In quale insieme la trasformata di Laplace tende a 0 per $s \to \infty$? e la derivata di una trasformata di Laplace tende a 0 per $s \to \infty$ nello stesso tipo di insieme?
    Sol. - Nell'angolo convesso di fig. 4.2 di p. 172. Alla seconda domanda la risposta è sì, perché anche la derivata di una trasformata è una trasformata, per il teor. 4.3.12.

23. La trasformata di Laplace non tende necessariamente a 0 per $s \to \infty$ su una retta verticale. Che cosa invece tende necessariamente a 0 su tali rette?
    Sol. - La trasformata divisa per s; vd. teor. 4.2.10.

24. Nella trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione intervengono ascisse di convergenza; si dica quale è l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace del prodotto rispetto a quella delle trasformate dei singoli fattori.
    Sol. - L'ascissa di convergenza è certamente minore o uguale alla più grande della ascisse di convergenza dei due fattori. La formula (4.4.8) del teor. 4.4.5 è valida dove esistono entrambi i membri, ma potrebbe succedere che il prodotto sia trasformabile anche dove non lo sono entrambii singoli fattori.

25. Si dia la definizione di funzionale continuo sullo spazio $\mathcal{D}$, descrivendo la convergenza in tale spazio. Dimostrare quindi che la δ è un funzionale continuo su $\mathcal{D}$.
    Sol. - Def. 5.1.7 e 5.1.12.

26. Cosa significa che lo spazio delle distribuzioni è uno spazio completo? Rispetto a quale convergenza?
    Sol. - La convergenza è definita in 5.3.1, e la completezza nel teor. 5.3.3. Infatti (vd. 5.3.2) il funzionale costruito ponendo $\langle F, \phi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle T_n, \phi \rangle$ potrebbe non essere continuo, e quindi non essere una distribuzione. Il teor. di completezza invece garantisce la continuità del funzionale definito come sopra.

27. Si dia la definizione di derivata di una distribuzione e si verifichi che, nel caso delle distribuzioni di tipo T_f tale definizione rispetta il teor. di integrazione per parti.
    Sol. - Vd. 5.2.1 e 5.2.2.

28. Si dia la definizione di prodotto tra una distribuzione e una funzione α.
A quale spazio deve appartenere la funzione?
Verificare che la derivazione di tale prodotto riproduce la regola di derivazione del prodotto tra funzioni.
Sol. - La funzione α deve essere $C^\infty(\mathbb{R})$ (5.1.33); la verifica richiesta consiste nel calcolo del teor. 5.2.3.