COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Decima settimana

1.12.2008 - lunedì (2 ore)

Ripresa della differenza tra trasformata di Laplace e trasformata assoluta di Laplace (vd. settimana precedente).
L'integrale di Laplace può convergere per certi s e per altri no.
Ripresa dello spazio $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$.

Non tutte le funzioni di $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ hanno trasformata di Laplace: e^{t^2} non ce l'ha, in quanto l'integrale non converge per nessun s.

Semipiano di convergenza (assoluta) (4.1.12, senza dim.).
Ascissa di convergenza (assoluta) (a.d.c.): è l'estremo inferiore delle parti reali di quegli s per i quali l'integrale converge.

Calcolo di alcune trasformate elementari:

$$e^{kt} \to \frac{1}{s-k}; \qquad \sin \omega t \to \frac{\omega}{s^2+\omega^2}; \qquad \cos \omega t \to \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Convergenza uniforme di un integrale.
Convergenza uniforme dell'integrale di Laplace in un angolo convesso (teor. 4.2.1, dove ρ^* è da intendersi l'ascissa di convergenza assoluta ρ).
Trasformabilità delle funzioni del tipo $\mathcal{O}(e^{kt})$, $\mathcal{O}(t^k)$, con a.d.c. k e 0 rispettivamente.

Trasformabilità delle funzioni limitate ($\rho \leq 0$), dei polinomi (4.2.6); le funzioni a supporto compatto ($\rho = -\infty$).
(vd. settimana precedente)

Tendenza a 0 della trasformata entro un angolo convesso (4.2.7, senza dim.)

Se addirittura la funzione è sommabile, e non solo localmente sommabile, l'integrale di Laplace tende a 0 per $s \to \infty$ con a.d.c. $\rho \leq 0$.

Tendenza a 0 di $\frac{[\mathcal{L}(f)](s)}{s}$ sulle rette verticali (4.2.10).

La $\mathcal{L}$-trasformata è una funzione olomorfa all'interno del semipiano di convergenza (assoluta); inoltre se f è (assolutamente) trasformabile, lo è anche $t^n f(t)$ nello stesso semipiano, e in tale semipiano si ha

$$[\mathcal{L}(f)]^{[n]} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n\ f(t))$$

Prima formula fondamentale di Laplace(vd. 4.2.12, senza dim.).

Confronto con la trasformata di Fourier riguardo alla derivabilità e tendenza a zero.

Trasformata di $\frac{f(t)}{t}$:

$$\mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big) = \int_s^{\infty} [\mathcal{L}(f)](\sigma)\ d\sigma$$

Si noti che l'integrale va da un punto s all'infinito su un qualsiasi cammino interno ad un angolo convesso del tipo $A(s_0, \theta)$.
Si fa prima la derivata della trasformata di $Fft)/t$ e viene $-\mathcal{L}(f)$, e poi si integra da s_0 a s e viene un $+c$; ma poiché il primo membro è una trasformata, deve tendere a 0 e quindi l'integrale da s_0 all'infinito vale c, e quindi rimane l'integrale da s all'infinito.

Si trovano esercizi sul libro: la trasformata di $t \sin \omega t$, di $\frac{\sin \omega t}{t}$. Quest'ultima dà la determinazione principale dell'arcotangente di $\pi/2 - \arctan(s/\omega)$ con $\rho = 0$. il che equivale a $\arctan \omega/s$ (anche sui reali è $\forall t > 0\ \arctan t + \arctan(1/t) = \pi/2$).

Impariamo a memoria la trasformata di t^n:

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Traslazione in s e traslazione in t.

2.12.2008 - martedì (2 ore)
Cambiamento di scala (4.3.3).

Esempio 4.3.4 (salvo la formula (4.3.4).

Esempio 4.3.5 (trasformata di una differenza di esponenziali fratto t). Considerazioni sulla possibile non esistenza delle trasformate dei singoli addendi.

Trasformata di una funzione periodica (4.3.7, senza dim.)

Considerazioni tra serie di trasformate (di monomi) e trasformata di una serie (di monomi).
Esempio 4.3.11: la coincidenza delle due funzioni si ha *all'esterno* della circonferenza; nella restante parte del piano si ha l'uguaglianza dei prolungamenti analitici.

Accenno (semplicemente culturale, al di fuori dell'ambito dell'esame) alla funzione Γ e alla sua proprietà $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (formula (4.2.28) e righe immediatamente successive).

Convoluzione in $\mathbb{R}_0^+$ e teorema sulla trasformata della convoluzione.

$\mathcal{L}$-trasformata dell'integrale (teor. 4.5.2 con le ipotesi ristrette alla trasformabilità assoluta. In queste ipotesi la dimostrazione si riduce alle ultime tre righe.)
Si noti che se la f è trasformabile (anche non assolutamente) con una ascissa di convergenza ρ, una sua primitiva lo è assolutamente e l'a.d.c è minore della maggiore tra 0 e ρ.

Esempio 4.5.3.

4.12.2008 - giovedì (2 ore)

Teorema sulla trasformata della derivata (teor. 4.5.4, con le ipotesi considerate sempre soddisfatte se vi è l'ipotesi della trasformabilità (assoluta) della derivata); formula (4.5.7).

Nella stessa condizione delle ipotesi, formula generale per la trasformata di una derivata di ordine n: teor. 4.5.5.

Applicazioni della trasformata di Laplace (§ 4.8)

Equazioni differenziali di vari ordini: ripresa delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e della loro soluzione con il metodo classico, considerando l'equazione omogenea, l'equazione caratteristica e il sistema fondamentale di integrali.

Equazioni del primo e del secondo ordine: 4.8.3, 4.8.4.
Applicazione ad una equazione differenziale.

Inversione di una trasformata di Laplace in alcuni casi particolari: formula (4.10.4) e oss. 4.10.2 (esclusa la parte scritta in piccolo).

Applicazione ad alcune equazioni integrali (seconda metà di 4.12.1, da 4.12.2 a 4.12.13).

****

Non fanno parte del programma d'esame: 3.8.1; 3.8.2; da 3.8.6 alla fine del Cap. 3; 4.1.3; 4.1.6; dim. di 4.1.12; 4.1.22; dim. di 4.2.1; 4.2.3; dim. di 4.2.4; dim. di 4.2.5; dim. di 4.2.7; dim. di 4.2.12; 4.2.18 salvo la formula (4.2.29); 4.2.19; formula (4.3.4); dim. di 4.3.2; la formula (4.3.4); dim. di 4.3.7; 4.4.4; dim. di 4.4.5; 4.5.1; le righe successive alla terza della dim. di 4.5.2; dim. di 4.5.4; 4.5.6; 4.5.7; § 4.6; § 4.9; 4.10.1; da 4.10.3 a metà di pag. 226.4.12.5.