COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2006-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Undicesima settimana

8.12.2008 - lunedì (2 ore)
Festività dell'Immacolate Concezione

9.12.2008 - martedì (2 ore)

Equazioni del primo e del secondo ordine.
Equazione algebrica ed equazione immagine:
Posto $\mathcal{L}(f) = Y$ l'equazione algebrica

$$y' + ky = f(t)$$

applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri, diventa l'equazione immagine

$$sY(s) - y(0) + kY(s) = F(s)$$

da cui

$$Y(s) = F(s)\frac{1}{s+k} + y(0)\frac{1}{s+k}$$

Notiamo che non c'è bisogno di calcolare $F(s)$, basta saper fare $f * e^{-kt}$. Pertanto la soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(t) = f * e^{-kt} + y(0)e^{-kt}$$

La soluzione è costituita di due addendi: il primo è la soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = 0$, quindi è l'integrale particolare che passa per l'origine; il secondo è invece un integrale particolare della omogenea, quello che passa per il punto $(0, y(0))$ che, al variare di $y(0)$, fornisce tutte le soluzioni della omogenea.

Il primo termine della soluzione rappresenta l'*evoluzione forzata*, mentre il secondo l'*evoluzione libera*.

Prendiamo ora un problema di Cauchy del secondo ordine

$$ay'' + by' + cy = f(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

Applicando la trasformata otteniamo, dopo un po' di passaggi

$$[as^2 + bs + c]Y(s) = ay_0 s + ay_1 + by_0 + F(s)$$

e possiamo risolvere rispetto ad $Y(s)$ (vd. 8.4.8, in particolare la formula (4.8.14)).
Sono interessanti quindi funzioni, che chiameremo h e g, che abbiano come L-trasformate rispettivamente

$$\frac{ay_0s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c}\,, \qquad \frac{1}{as^2 + bs + c}.$$

g viene detta *funzione di Green*

Consideriamo il polinomio caratteristico e le sue radici: se sono $\alpha_1 \neq \alpha_2$ allora entrambe le frazioni si possono scomporre in fratti semplici, e danno, come antitrasformate delle esponenziali (ovviamente con coefficienti diversi).

Se invece il polinomio caratteristico ha una radice doppia α, la frazione si scompone in $M/(s-\alpha) + N/(s-\alpha)^2$ che hanno come antitrasfomaterispettivamente $e^{\alpha t}$ e $te^{\alpha t}$, come era da prevedersi.

Esempio con un'equazione di primo grado non omogenea, il cui secondo membro è un'esponenziale con un esponente che è soluzione dell'equazione caratteristica: $y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 1$.

L'equazione caratteristica ha come soluzione $\lambda = 2$; per trovare un integrale particolare della omogenea bisogna provare con Ate^{2t} (viene con i calcoli $A = 1$)
La trasformata porta proprio $1/(s-2)$ e $1/(s-2)^2$.

Accenno alla trasformata di Laplace bilatera (che converge in una striscia) e alla formula di inversione (4.10.4). Significato del vp, significato dell'integrale da $x - i\infty$ a $x + \imath\infty$.

La trasformata di Laplace come famiglia di trasformate di Fourier (4.10.1).$\blacksquare$

Consideriamo la risposta al gradino unitario $u(t)$ di un sistema la cui funzione di Green sia $g(t)$; sarà $y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$. Allora in questa caso risulta, derivando

$$g(t) = \frac{dy_u(t)}{dt}$$

Una volta determinata anche sperimentalmente la risposta al gradino unitario, se $f(t)$ è il termine noto, un integrale particolare è

$$g(t) * f(t) = f * \frac{dy_u(t)}{dt} \qquad (\textit{formula di Duhamel})$$

11.12.2008 - giovedí (2 ore)

Consideriamo un'equazione integrale (di *seconda specie*):

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t-\tau)y(\tau)\ d\tau = g(t) + k * y(t)$$

Effettuando la trasformata abbiamo

$$Y(s) = G(s) + K(s) \cdot Y(s)$$

risolvendo

$$(1) \quad Y(s) = \frac{G(s)}{1-K(s)} = \text{ (aggiungendo e togliendo } G(s)K(s)) = \\ = G(s) + \frac{K(s)}{1-K(s)}G(s)$$

Se troviamo l'antitrasformata q di $\frac{K(s)}{1-K(s)}$ (questo quoziente è sempre una trasformata) abbiamo $y(t) = (q * g)(t)$. Altrimenti, tornando alla formula di prima, possiamo sviluppare in serie $\frac{1}{1-K(s)}$ che è una serie geometrica di ragione $K(s)$ e antirasformare i singoli termini.

Risolviamo

$$y(t) = H(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\ d\tau$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}Y(s)$$

raccogliendo e semplificando si ha $Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$ e antitrasformando si ha $y(t) = H(t) + t^2/2$.

Calcoliamo

$$g(t) = \int_0^t k(t-\tau)y(\tau)\ d\tau \Longrightarrow G(s) = K(s)Y(s)$$

da cui $Y(s) = G(S)/K(s)$.
Esempio:

$$t = \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\ d\tau \Longrightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{s-1}} = \cdots = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

da cui $y(t) = 1 - t$ Qui è facile la verifica (vd. 4.12.2)