COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Tredicesima settimana

8.1.2008 - giovedì (2 ore)

Recupero di alcuni elementi trascurati.
Trasformata di Laplace di una funzione periodica (4.3.7, senza dim.).

Verifica della trasformata del seno come funzione periodica:

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{1 - e^{-(2\pi/\omega)s}} \int_0^{2\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t \; dt$$

applicando due volte l'integrazione per parti e raccogliendo....

Calcolo della trasformata di $|\sin \omega t|$.
Questa volta il periodo è π/ω e ancora, applicando due volte l'integrazione per parti e raccogliendo, si ottiene:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-s\pi/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t \; e^{-st} \; dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + e^{-(\pi/\omega)s}}{1 - e^{-(\pi/\omega)s}}$$

Ricordiamo il prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}_0^+$: l'integrale va da 0 a t.

Verifichiamo che quando si fa il prodotto di convoluzione di una funzione f per la funzione di Heaviside si ha semplicemente l'integrale da 0 a t dalla funzione f stessa, e quindi la trasformata di $f * H$ è $\frac{F(s)}{s}$.

Calcoli di convoluzioni (es. 36, 38, 40, 41 del cap. 4).

Calcoliamo la convoluzione $f * f$ dove f è la funzione che vale t fino a 1 e nulla altrove.
Per $t < 0$ vale 0. Per $0 \leq t \leq 1$ l'integrale va da 0 a t; per $1 < t \leq 2$ l'integrale va da $t-1$ a 1; per $t > 2$ l'integrale è nullo. Il calcolo dell'integrale richiede ovviamente il calcolo (banale) di $\int \tau(t-\tau)\; d\tau$.

Calcoliamo la convoluzione in $\mathbb{R}_0^+$ di $f * g$ dove f vale t per $t \in [0,1]$ e 0 altrove, mentre g vale t per $t \in [0,2]$ e 0 altrove.
Per $t \leq 0$ l'integrale è nullo. Per $0 < t \leq 1$ l'integrale va da 0 a t; per $1 < t \leq 2$ l'integrale va da 0 a 1. Per $t \in [2,3]$ l'integrale va da $t-2$ a 1.

Per $t > 3$ l'integrale è nullo.

Il prodotto di convoluzione di due funzioni a supporto compatto è a supporto compatto?
Sì.

In generale, bisogna guardare quali sono i supporti e veder quando hanno punti a comune al variare di t: vedere per $t = 0$ quale è il supporto della $g(0 - \tau)$ e poi far slittare al variare di t.

Calcoliamo la convoluzione in $\mathbb{R}$ tra la funzione che vale 1 per $|t| < 2$ e 0 altrove e quella che vale t^2 per $|t| < 1$.
I due supporti hanno punti a comune a partire da $t+1 = -2$, cioè da $t = -3$, prima di -3 l'integrale è nullo. L'integrale poi va da -2 a $t + 1$ fin quando $t - 1 = -2$, cioèfino a che $t = -1$; poi l'integrale va da $t - 1$ a $t + 1$ fin quando $t + 1 = 2$, cioè fino a $t = 1$; poi l'integrale va da $t - 1$ a 2 fin quando $t - 1 = 2$ cioè $t = 3$. Per $t \geq 3$ l'integrale è nullo.

Calcoliamo (vd. 4.2.16) l'antitrasformata di Laplace $f(t)$ di

$$g(s) = \log\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$$

Calcoliamo $g'(s)$ che sarà quindi la trasformata di $-tf(t)$. Derivando il secondo membro otteniamo

$$-\frac{2}{s(s^2+1)}$$

che è la trasformata di $-2H * \sin t$. Calcolando questa convoluzione si ha $-2[\cos(t - \tau)]_0^t = 2(\cos t - 1)$, e quindi è

$$f(t) = -2\frac{\cos t - 1}{t}$$

Se si volesse fare la riprova, si tratta di calcolare

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[\cos t - 1](\sigma)\ d\sigma$$

e si ottiene la funzione di partenza.

Si risolva il problema integro-differenziale (vd. 4.12.12)

$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(\tau)\ d\tau \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e trasformado entrambi i membri si ottiene

$$s\mathcal{L}(y) - 1 = \frac{1}{s}\mathcal{L}$$

da cui risulta il coseno iperbolico.

Risolviamo l'equazione integrale

$$y(t) = t - \int_0^t y(\tau)\ d\tau$$

nel testo (vd. 4.12.10) c'è un errore di stampa: un "-" al posto di una moltiplicazione.

Cosa significa "funzionale"?
Cosa significa il simbolo T_f usato nella teoria delle distribuzioni?

Una distruibuzione si dice *nulla* su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ se assume valore 0 su tutte le ϕ che hanno supporto contenuto in Ω.(vd. 5.1.21)

Ad esempio: la δ è nulla sull'aperto $]0,4[$ oppure sull'aperto $]-5.-2[$. Non è invece nulla sull'aperto $]-1,3[$.

Definizione di *insieme nullo* di una distribuzione: è l'unione di tutti gli aperti sui quali la distribuzione è nulla. L'insieme nullo della δ è l'aperto costituiuo dalle due semirette dei reali negativi e positivi (lo 0 è ecluso).

Supporto di una distribuzione è il complementare dell'insieme nullo.

Il supporto della δ è lo 0, il supporto della $\delta_{(a)}$ è a.

[(fuori programma)
Definiamo le funzioni a decrescenza rapida (5.1.26) e le distribuzioni temperate (5.1.30).

La δ è una distribuzione temperata? Sì.
È una distribuzione a supporto compatto? Sì.

Non abbiamo definito la trasformata di Laplace di una distribuzione qualsiasi. Però in casi abbastanza generali tra le distribuzioni temperate che hanno come supporto la semiretta dei positivi si può definire la $\mathcal{L}$-trasformata di una distribuzione T nel modo seguente:

$$< T, e^{-st} >$$

Ciò porta subito che la trasformata della δ è la funzione 1 e la trasformata della traslata $\delta_{(a)}$ è e^{-as}. Ci si accorge facilmente che se la T fosse una T_f associata ad una funzione localmente sommabile f avremmo la definizione solita della trasformata di Laplace.]

Data una successione di funzioni $\{f_n\}$, illustrare la differenza tra la convergenza puntuale, la convergenza uniforme su un intervallo $[a,b]$ e la convergenza in $\mathcal{D}$' delle distribuzioni associate T_{f_n}. Un tipo di convergenza è più forte di un altro?

Altri esempi in cui la tendenza è alla δ oppure non c'è neanche nel senso delle distribuzioni, pur esistendo nel senso delle funzioni.

Una funzione razionale fratta è sempre una trasformata di Laplace?
Sì, se è propria.
$\frac{s}{s-3}$ non lo è.

Una funzione olomorfa che tende a 0 nell'angolo convesso è sempre la trasformata di Laplace di una funzione?
No, e^{-as} non lo è; lo è di una distribuzione.

La costante $g = 4$ è una trasformata di Laplace?
Sì, ma non di una funzione, bensì della distribuzione 4δ.

Cosa significa che lo spazio delle funzioni continue è completo? Rispetto a quale convergenza? E lo spazio delle distribuzioni?

Cosa significa che la trasformata di Laplace è una "famiglia di trasformate di Fourier"?