CM82sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Seconda settimana (6-12.10.2008)

6.10.2008 - lunedì (2 ore)

Richiamo sulla dipendenza lineare (ha senso soltanto negli spazi vettoriali):
In uno spazio vettoriale n vettori si dicono *linearmente indipendenti* se l'unica loro combinazione lineare finita che dà per risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli.

Definizione di ortogonalità (ha senso soltanto negli spazi prehilbertiani): due vettori in uno spazio vettoriale prehilbertiano si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è il numero 0.
(Ovviamente il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori.)
Per estensione: due *sottospazi* E ed F di uno spazio vettoriale si dicono *ortogonali* se ogni vettore di E è ortogonale ad ogni vettore di F (e ovviamente viceversa).

Disuguaglianza di Schwarz (ha senso soltanto negli spazi prehilbertiani):

$$|\prec x, y \succ|^2 \leq \prec x, x \succ \cdot \prec y, y \succ$$

e vale il segno di uguaglianza se i due vettori sono linearmente dipendenti.□

Tramite la disuguaglianza di Schwarz si dimostra che la funzione

$$N(x) = \sqrt{|\prec x, x \succ|^2}$$

gode delle proprietà della norma e pertanto la disuguaglianza di Schwarz si può scrivere

$$|\prec x, y \succ| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Dato che in uno spazio prehilbertiano un prodotto scalare induce una norma, e questa induce una metrica, chiameremo quest'ultima "metrica (naturale) dello spazio". Uno spazio può avere più di una norma e quindi più di una metrica.

Ricordiamo che uno spazio si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente nello spazio.

La densità gode della proprietà transitiva. (Es. 1.1.21)
Uno sottospazio M' di uno spazio metrico M che sia un sottoinsieme proprio di M e denso in M non può essere completo. (Es. 1.1.22)

Isomorfismo tra spazi vettoriali, tra spazi normati e tra spazi di Hilbert (1.1.27).

Lo spazio ℓ^2 (1.1.28):
è costituito da successioni $\{a_i\}$ tali che
$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < +\infty.$$
Definizione di somma (la successione della somma delle coordinate omologhe), di combinazione lineare (la successione della combinazione lineare delle coordinate omologhe) (1.1.19).
Il prodotto scalare tra due successioni $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ è definito da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\overline{b_i}$.
(1.1.20) Per comodità ci restringiamo al corpo reale, e quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

Siamo sicuri che questo prodotto scalare è ben definito?
Sì; infatti la serie che lo definisce è a quadrato convergente. La norma risulta quindi:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

Questo spazio è l'immediata generalizzazione degli spazi a dimensione finita (si noti che tutti gli spazi di dimensione n sono isomorfi a $\mathbb{R}^n$).

Proprietà di ℓ^2.
ℓ^2 c̀ompleto (dim. omessa).
ℓ^2 è separabile. Infatti un sottoinsieme denso e numerabile è costituito dalle combinazioni lineari finite a coefficienti razionali dei vettori del tipo {1,0,0,0,....}, {0,1,0,0,...} .... {0,0,..., 0,1,0,0...}.
Inoltre ha dimensione infinita e quindi è uno spazio di Hilbert.

Uno spazio può essere dotato di più norme. Ad esempio in $\mathbb{R}^n$ oltre a quella euclidea c'è la *city block*:

$$||x|| = max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

e quella

$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

In questa, per $n = 2$, i vettori di norma unitaria costituiscono un quadrato con i vertici sugli assi.

Gli spazi funzionali (§1.5)
Le norme in $C^0([a,b])$, $L^1([a,b])$, $L^2([a,b])$. Esempi ed esercizi da 1.5.8 a 1.5.13 (saltando 1.5.11). Esercizi proposti del Cap. 1 (saltando i n.^{i} 2, 3, 4, 7, da 10 a 14, 16; per le soluzioni vd. Appendice A).

Dimensioni, basi ed approssimazioni (§1.9)

0.0.1 Definizione. In uno spazio metrico V a dimensione infinita un sistema di vettori $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ si dice *base* se per ogni vettore $v \in V$, $\forall\epsilon > 0$ si può trovare un numero finito $n(\epsilon)$ di coefficienti c_i tale che:

$$||x - \sum_{i=1}^{n(\epsilon)} c_i u_i|| < \epsilon.$$

□

0.0.2 Teorema. *(della migliore approssimazione in norma) (1.9.10) Dato uno spazio (pre)hilbertiano ed in esso una famiglia di vettori ortonormali* $\{u_k\}$*, i coefficienti* $\{c_k\}$ *che rendono minima la norma*

$$||x - \sum_{k=1}^{n} c_k \ u_k||$$

sono dati da

$$a_k = \langle x, u_k\rangle.$$

(La dim. viene accennata in classe per cultura, per vedere un esempio dell'uso dell'ortonormalità.)

Alcuni esempi di spazi funzionali (= costituiti da funzioni):
$C^0([a,b]),\ C^1([a,b]), L^1([a,b]), L^2([a,b])$. Verifica di alcune funzioni che sono contenute in uno spazio e non nell'altro.
Ovviamente, è $C^1 \subset C^0$ e, se [a, b] è un intervallo chiuso e limitato, C^0 è palesemente sottoinsieme sia di L^1 che di L^2. Su quale spazio è contenente e quale è contenuto tra L^1 ed L^2 la cosa varia a seconda di come è fatto l'intervallo $[a,b]$. Ad es. se poniamo $[a,b] = [0,1]$ abbiamo che $1/x$ non appartiene a né ad L^1 né ad L^2. Però $1/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$, mentre è $1/\sqrt{x} \notin L^2([0,1])$. Invece $1/\sqrt[4]{x}$ appartiene sia all'uno che all'altro. Pertanto se l'intervallo è $[0,1]$ è $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, mentre sarebbe il viceversa se l'intervallo fosse una semiretta del tipo $[1,+\infty)$ (*non abbiamo dimostrato* queste inclusioni, abbiamo solo verificato che esiste un vettore che sta nell'uno e non nell'altro).

7.10.2008 - martedì (2 ore)
Non effettuata per impegni scientifici del docente.

9.10.2008 - giovedì (2 ore)

Norme diverse nei diversi spazi funzionali: in $C^0([a,b])$ c'è la norma del sup (dato che sono funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, tanto vale dire "max"), in L^2 c'è la norma dell'integrale

$$||f||_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

che proviene dal prodotto scalare seguente:

$$\prec f, g \succ = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx$$

in $L^1([a,b])$ c'è la norma dell'integrale

$$||f||_{L^{(}[a,b])} = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

che *non* proviene da nessun prodotto scalare.

Densità (def. 1.6.1).

Teoremi di densità: $C^1([a,b])$ è denso in $C^0([a,b])$, che è denso in $L^2([a,b])$ che è denso in $L^1([a,b])$. (teorr. 1.6.4, 1.6.5, 1.6.6)

Teorema di Fischer-Riesz (senza dim.; teor. 1.5.15 solo nel caso $p = 2$), dove il prodotto scalare è definito così:

$$\prec f, g \succ = \int_E f\overline{g} \, dx$$

e la norma quindi risulta

$$||f||_{L(E)} = \left(\int_E |f|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Il teorema asserisce che L^2 è uno spazio di Hilbert, e ne dà alcune proprietà: data una successione che converge secondo Cauchy, se ne può estrarre una che converge in senso ordinario ad una funzione $f \in L^2$; inoltre f_n converge ad f nella norma di L^2.

Norme diverse su $C^0([a,b])$.
Relazioni tra la norma e la convergenza.
Esercizi 1.5.24, 1.5.28 (tipi di convergenza); 1.5.30.

****

Non fanno parte del programma d'esame: (i numeri si riferiscono al libro di testo: C. Minnaja: Metodi matematici per l'Ingegneria, Parte II - Integrale di Lebesgue, serie di Fourier, trasformate, distribuzioni. Ed. Progetto, 2000): dim. di 1.1.11; dim. di 1.1.12; la dim. della completezza di ℓ^2 (a p. 9); 1.1.31; 1.1.32; 1.1.35; 1.1.39; da 1.2 a 1.8; esercizi proposti 1, 3, 7, 10, 16 di p. 46.