CM83sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Terza settimana (13-19.10.2008)

13.10.2008 - lunedì (2 ore)

Definizione di *funzione caratteristica* di un insieme: è una funzione che vale 1 sull'insieme e 0 altrove. (1.4.13)

Definizione di *funzione a scala*:
È una combinazione lineare di funzioni caratteristiche su rettangoli.
Per il nostro caso, in cui consideriamo solo funzioni di una variabile reale, definite in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è la *combinazione lineare di funzioni caratteristiche su intervalli.* (1.4.14, 1.4.15)

0.0.1 TEOREMA. *(di Fischer-Riesz): L^2 è uno spazio di Hilbert.*

(senza dim.; teor. 1.5.15 solo nel caso $p = 2$).
Ricordiamo che il prodotto scalare in $L^2(E)$ è definito così:

$$\prec f, g \succ = \int_E f\overline{g}\ dx$$

e la norma quindi risulta

$$||f||_{L(E)} = \left(\int_E |f|^2\ dx\right)^{1/2}$$

DIMOSTRAZIONE. (accenno) La parte principale della dimostrazione del teorema consiste nel dimostrare che lo spazio è completo e che è separabile.
La dim. si articola in vari passi; un passo intermedio consiste nel dimostrare che, data una successione $\{f_n\}$ che converge secondo Cauchy (ovviamente nella norma di $L^2(E)$), da questa si può estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge in senso ordinario (cioè puntualmente) ad una funzione $f \in L^2$ (attenzione: la convergenza puntuale *non* è la convergenza secondo una norma!); poi si dimostra che l'intera successione $\{f_n\}$ converge ad f nella norma di L^2. □

0.0.2 TEOREMA. *Lo spazio delle funzioni a scala su E è denso nello spazio $L^1(E)$ nella norma di $L^1(E)$ ed è denso nello spazio $L^2(E)$ nella norma di $L^2(E)$.*

(1.6.3, senza dim.)

Teoremi di densità: $C^1([a, b])$ è denso in $C^0([a, b])$, che è denso in $L^2([a, b])$ che è denso in $L^1([a, b])$. (teorr. 1.6.4, 1.6.5, 1.6.6)
(ricordiamo che in un intervallo limitato è $L^2([a, b]) \subset L^1([a, b])$).

Cosa significa che una funzione è sviluppabile in serie di determinate funzioni $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$?
Che esiste una successione $\{c_n\}$ di numeri (reali o complessi) tali che, punto per punto, sia

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

E se invece $k \in \mathbb{Z}$?
Che esistono due successioni di coefficienti, per n positivi e negativi tali che

$$f = c_0 u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n u_n + c_{-n} u_{-n})$$

Definizione di polinomio trigonometrico e di serie trigonometrica: gli u_n sono $\sin nx$ e $\cos nx$ (n naturale), oppure, usando la variabile complessa, sono e^{inx} dove $n \in \mathbb{Z}$. I singoli addendi si dicono "armoniche", l'addendo con indice n (il complesso degli addendi di indice n e $-n$) si dice "ennesima armonica"..

Equivalenza delle notazioni nell'esprimere polinomi e serie trigonometriche, tramite seni e coseni, oppure esponenziali complesse, oppure
$A_n \sin(nx + \phi_n)$.
I coefficienti rispettano le formule (2.1.12).
Quando una serie trigonometrica converge in un punto, converge anche nei punti che distano $2K\pi$, e converge allo stesso valore. Quindi la somma di una serie trigonometrica, quando esiste, è una funzione periodica di periodo 2π.

0.0.3 Teorema. - *Il sistema* $\cos nx$, $\sin nx$ *è un sistema ortogonale in* $L^2([-\pi, \pi])$.

(niente dim.)
Non è invece normale: il prodotto scalare di coseni di indice uguale $n \neq 0$ vale π e se $n = 0$ vale 2π; il prodotto scalare di seni di indice uguale $n \neq 0$ vale π (per $n = 0$ varrebbe 0, ma appunto $\sin 0x$ non fa parte del sistema di vettori, perché sarebbe ortogonale a tutti).
Se si vuole un sistema anche normale, basta dividere per la norma, che quindi è $\sqrt{\pi}$ per $n \neq 0$ e $\sqrt{2\pi}$ per $n = 0$.
Per le esponenziali invece la norma è sempre $\sqrt{2\pi}$.

0.0.4 Teorema. *Sia* f *continua in* $[-\pi, \pi]$. *Se esiste una serie trigonometrica*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

che converge uniformemente ad f (cioè nella norma di $C^0([-\pi,\pi])$, allora i suoi coefficienti sono dati dalla (2.1.24)

(niente dim.)
I coefficienti dati dalla (2.1.24) si dicono *coefficienti di Fourier*; una serie trigonometrica che ha quei coefficienti si dice *serie di Fourier della f.*

Attenzione: l'esistenza della serie di Fourier di una funzione f è garantita per qualsiasi funzione che ha l'integrale finito sull'intervallo $[-\pi,\pi]$, cioè per qualsiasi funzione di $L^1([-\pi,\pi])$. Non c'è nessuna garanzia che questa serie converga in nessuna norma, né tanto meno che converga alla f, neppure puntualmente.

Perché sono interessanti le serie di Fourier? perché risolvono il problema di minimo in $L^2([-\pi,\pi])$. Infatti se si prendono le funzioni trigonometriche normalizzate, i coefficienti $\prec f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \succ$ e $\prec f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \succ$ sono proprio i coefficienti a_k del teor. della migliore approssimazione in norma.

Se si prende una funzione f che ha la serie di Fourier e poi se ne cambia il valore in un numero finito di punti, la nuova funzioe ha ancora serie di Fourier che è la stessa di prima. Pertanto una serie di Fourier *non* individua univocamente una funzione.

0.0.5 TEOREMA. *Se una funzione è pari, la sua serie di Fourier ha solo i coseni, se è dispari ha solo i seni.*

(teor. 2.2.1, senza dim.).

Prolungamento per periodicità: se g è definita su $[-\pi,\pi]$ quando x è fuori di tale intervallo si pone $g(x) = g(x-2\pi)$. Si confonde poi (deliberatamente) una funzione definita su un intervallo con il suo prolungamento per periodicità, e la serie di Fourier dell'una è uguale a quella dell'altra.

Prolungamento per per parità, per disparità.

14.10.2008 - martedì (2 ore)

Cambiamento dell'intervallo di base: invece che prendere $[-\pi,\pi]$ si prende l'intervallo $[-\ell,\ell]$ e poi l'intervallo $[0.T]$ e allora i coefficienti hanno $2/T$ davanti all'integrale, l'integrale va da $-\ell$ a ℓ, oppure da 0 a T; gli argomenti dei seni e coseni sono $(2\pi/T)nx$ e anche le convergenze, quando ci sono, sono su $[0,T]$.
Spesso si prende come parametro fondamentale non il periodo 2π, bensì la frequenza λ che è l'inverso del periodo. Pertanto il sistema trigonometrico sarà $\{\cos n2\pi\lambda x,\ \sin n2\pi\lambda x\}$ e i coefficienti avranno, fuori dell'integrale, 1 fratto metà del periodo. Con le esponenziali i coefficienti avranno 1 fratto l'intero periodo.

Richiami sulle serie di Taylor e significato delle convergenze dei due tipi di serie (Taylor e Fourier)

.

Il caso delle funzioni continue

Se f è continua, la serie di Fourier di f converge ad f in media quadratica (= nella norma di $L^2([-\pi,\pi])$).

Se f è continua, e la sua serie di Fourier converge uniformemente, allora converge ad f.

Due funzioni continue che hanno la stessa serie di Fourier sono uguali.

0.0.6 TEOREMA. *Se $f \in C^2(\mathbb{R})$, periodica di periodo 2π, la sua serie di Fourier converge uniformemente.*

(con dim.: 2.5.7)

Altri criteri di convergenza

0.0.7 TEOREMA. *(***Criterio di Riemann-Lebesgue***) Se $f \in L([a,b])$, allora è*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

In particolare, se ciò è vero per λ è vero per la variabile $n \to \infty$, e siccome $e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$ (questo lo si vedrà quando si tratteranno le funzioni di variabile complessa), basta dimostrare che tendono a zero gli integrali del tipo

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx$$

che sono proprio i coefficienti di Fourier; quindi i coefficienti di Fourier tendono a 0 comunque, anche se la serie di Fourier non converge. La dim. (cenni, fatti solo sui coefficienti a_n) è significativa perché si dimostra la tesi per $f \in C^1([a,b])$ e poi si sfrutta la densità di C^1 in $L([a,b])$.
Si integra per parti e poi si maggiora il modulo dell'integrale della derivata (vd. prima metà della p. 78).

0.0.8 TEOREMA. *(***Criterio del Dini***) Sia $f \in L([a,b])$; se per x fissato esiste in corrispondenza un numero reale $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\right|\,dz < +\infty$$

allora la serie di Fourier converge in x ad $f(x)$.

(Attenzione: sul libro è erroneamente scritto al denominatore 2 al posto di z)

0.0.9 TEOREMA. *(di Riemann sul carattere locale della convergenza della serie di Fourier) La convergenza o meno in un punto x della serie di Fourier dipende dai valori della funzione in un intorno di quel punto arbitrariamente piccolo, mentre i coefficienti della serie dipendono dai valori su tutto l'intervallo.*

0.0.10 ESERCIZIO. Non è detto che una funzione continua in un punto soddisfi in quel punto la condizione del Dini; la continuità indica semplicemente che il numeratore della funzione integranda tende a zero, ma potrebbe tendere a zero di un ordine inferiore a qualsiasi ordine inferiore al primo. □

0.0.11 TEOREMA. *(***Condizioni del Dini unilaterali***): se esistono finiti il limite destro e sinistro della f, e sono finiti gli integrali fatti sugli intervalli tra 0 e δ e tra $-\delta$ e 0, allora la serie di Fourier converge alla media dei due limiti:*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(niente dim.)

Nel caso che f sia continua, e siano soddisfatte le condizioni del Dini unilaterali, si ha il criterio del Dini visto prima.

<u>Punti di salto</u>

0.0.12 DEFINIZIONE. Se esistono i limiti destro e sinistro per $x \to x_0$ diversi tra loro, si dice *salto* la quantità $f(x_0+0)-f(x_0-0)$. □

È irrilevante se la f esista in quel punto ed eventualmente quale valore abbia.

Condizione di Hölder; definizione di funzione hölderiana di ordine α in un punto. (def. 2.6.22)

Se $\alpha = 1$ la funzione si dice *lipschitziana*.

Notiamo che se una funzione è hölderiana in un punto, è certamente continua in quel punto.

Esempio di funzione non hölderiana di nessun ordine α ($1/\lg|x|$ in un opportuno intorno di 0; vd. 2.6.24).

16.10.2008 - giovedì (2 ore)

Funzioni hölderiane e loro relazione con le funzioni derivabili; funzioni lipschitziane (2.6.22; 2.6.23).

0.0.13 TEOREMA. *Se f ha derivata limitata in un intero intervallo $[a, b]$ allora è uniformemente lipschitziana in $[a, b]$.*

(senza dim.) (2.6.26)

Esistono però funzioni che sono lipschitziane in un punto pur non avendo la derivata limitata in nessun intorno del punto:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \ per\ x = 0 \\ 0 \ per\ x = 0 \end{cases}$$

Teorema sulla convergenza della serie di Fourier nei punti di hölderianità (con dim.) (2.6.28).

Condizioni di Hölder unilaterali (con la h che può variare solo in un intorno destro o in un intorno sinistro; vd. 2.6.30).

0.0.14 Teorema. *Se f ha dei punti di salto, e in tali punti verifica le condizioni di Hölder unilaterali, la serie di Fourier converge alla media dei limiti destro e sinistro.*

(2.6.31, senza dim.)

Confronto con la continuità e con il criterio del Dini (2.7.10; 2.7.11).

Accelerazione della convergenza (2.7.8, cenno).

Fenomeno di Gibbs (2.7.22).

Definizione di *convergenza totale*: se $|f_n(x)| \leq a_n$ dove a_n sono i termini di una serie *numerica* convergente.

Se una serie di funzioni converge totalmente, allora converge uniformemente (ovvio).

0.0.15 Teorema. *Se $f \in C^2(\mathbb{R})$, periodica di periodo 2π, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente ad f.*

La dim. ricalca la dim. del teor. di Riemann Lebesgue fino alle considerazioni sulla derivata prima; la continuità della f'' garantisce la convergenza a 0 dei coefficienti come $1/n^2$, quindi la convergenza totale e quindi la convergenza uniforme.

Esercizi proposti del Capitolo 2 (per le soluzioni vd. Appendice A in fondo al libro)

. ************************************

Non fanno parte del programma d'esame: (i numeri si riferiscono al libro di testo: C. Minnaja: Metodi matematici per l'Ingegneria, Parte II - Integrale di Lebesgue, serie di Fourier, trasformate, distribuzioni. Ed. Progetto, 2000): da 1.9.4 akl primo capoverso (incluso) di 1.9.9; dim. di 1.9.10; da 1.9.15 a 1.9.18; dim. di 2.1.10; dim. di 2.1.12; dim. di 2.2.1; 2.2.3; 2.2.5;

2.2.8; 2.2.9; 2.3.5; 2.3.6; da 2.3.9 a 2.3.16; 2.4; dim. di 2.5.1; dim. di 2.5.3; da 2.5.10 a 2.5.18; dim. di 2.6.2; caso 3) dell'es. 2.6.5; da 2.6.6 a 2.6.14; dim. di 2.6.15; 2.6.16 (ad eccezione delle ultime sei righe); dim. di 2.6.19; dim. di 2.6.26; dim di 2.6.31; 2.6.33; 2.6.34; da 2.7.1 a 2.7.7; da 2.7.10 a 2.7.21; da 2.8 a 2.11; esercizi 3, 4, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19 di p. 123; esercizi 25, 28 di pag. 124.