CM84sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Quarta settimana

20.10.2008 - lunedì (2 ore)

Richiami sul piano complesso
I numeri reali come sottospazio dei complessi

Richiami sui numeri complessi: modulo, argomento.

Forma algebrica:$z = a + ib$; $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$. Numeri uguali, numeri coniugati. Somma, prodotto. La somma di due coniugati è $2\mathrm{Re}(z)$, il prodotto è il quadrato del modulo.

Quoziente (Attenzione nella formula (1.1.1) è erroneamente scritto al numeratore dell'ultimo termine $a_1b_2 - a_2b_1$ invece che $a_2b_1 - a_1b_2$.)

Forma trigonometrica (dei numeri diversi da 0): $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$. Argomento principale.

Prodotto scritto in forma trigonometrica: prodotto dei moduli e somma degli argomenti. Potenze, radici. Insiemi limitati ed illimitati, insiemi connessi, domini, regioni.
Isomorfismo tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$. (Dal vol. I del libro di testo: da 1.1.1 a 1.2.7)

Richiami sulle curve: curve regolari (le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili ed è $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} > 0$), curve chiuse ($x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$), curve semplici (per t diversi, immagini diverse).

Orientamento indotto dall'orientamento dell'intervallo $[a, b]$. Orientamento opposto. Retta tangente ad una curva nel punto $x(t_0), y(t_0)$:

$$\frac{y - y_0(t)}{y'(t_0)} = \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)}$$

Circonferenze, semicirconferenze, circonferenze orientate in verso contrario.

Contorni (o circuiti): sono le curve generalmente regolari, chiuse e semplici.

Teor. di Jordan per le curve *chiuse e semplici* (1.3.10).
C divide lo spazio in due regioni. Rgione interna, regione esterna, frontiera comune: ogni curva che ha estremi nelle due regioni diverse ha almeno un punto a comune con C.

Archi isoorientati se hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza.
Angolo tra due curve (provviste di tangenti).
Lunghezza di una curva regolare (c'è bisogno che ci siano le derivate)

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Regioni a connessione multipla.
Una regione Ω si dice *semplicemente connessa* se, data una qualsiasi curva di Jordan γ appartenente a Ω, anche l'intera regione circondata da γ appartiene a Ω
. Contorni omologhi: isoorientati e che circondano la stessa parte della frontiera di Ω.

Nel testo: §§ da 1.3 a1.4, compresi gli esercizi proposti.

Funzioni di una variabile complessa
Definizione:

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

Si rappresentano affiancando i due piani complessi.

Studio (sintetico) della funzione $f(z) = z^2$

$$w = f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$$

con $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = -2xy$
Le rette parallele agli assi hanno come immagine delle parabole (eventualmente degeneri).
Infatti poniamo $x = k$ e poi andiamo a sostituire; del pari con $y = k$ (sono parabole con la concavità dall'altra parte).
Si noti che le rette parallele agli assi equidistanti da essi (es. $x = +2$ e $x = -2$) hanno uguale immagine. Gli assi hanno come immagini i due semiassi dell'asse reale.

Limiti e continuità per una funzione di variabile complessa (2.1, 2.2).
Limite infinito per $z \to \infty$ (senza segno!)
Funzioni polinomiali.

21.10.2008 - martedì (2 ore)

Funzione esponenziale

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

e verifica che non si annulla mai (dal vol. I del libro di testo: 2.3.

Rapida dimostrazione della sua periodicità complessa (è stata verificata soltanto la non iniettività).
Immagine delle rette parallele agli assi.
Calcolo di $e^{-i\pi} = -1$.

Definizione delle funzioni trigonomemtriche delle funzioni iperboliche nel campo complesso. Formule di Eulero e legami tra l'esponenziale complessa e le funzioni trigonometriche. Opportunità di quelle definizioni: sui reali coincidono con le definizioni delle funzioni circolari reali.

Definizione di logaritmo come funzione plurivoca

$$\lg z = \ln |z| + i(\arg z + 2K\pi)$$

Determinazione principale.
Logaritmi dei numeri con modulo 1 o aventi tutti lo stesso modulo,
Logaritmi di particolari numeri negativi, logaritmo di qualche numero particolare (es. $1 + i$)

Definizione di funzione potenza (2.4.3-2.4.10).
Determinazione principale.

Funzioni di una variabile complessa: Definizione di derivata complessa e sua relazione con le derivate parziali delle funzioni di due variabili.

Regole di derivazione: uguali a quelle per le funzioni di una variabile reale (2.6.2-2.6.4; 2.6.7).

Esercizi da fare: 2.6.9; 2.6.10.

Definizione di funzione olomorfa e primi esempi (2.7.1-2.7.2) (direttamente, senza menzionare il lemma di Goursat)

Condizioni di Cauchy-Riemann: loro necessità (2.7.6, senza dim.) e loro sufficienza (2.7.9, senza dim.)

23.10.2008 - giovedì (2 ore)

Richiamo sulle curve, sugli integrali curvilinei, sulle forme differenziali e loro integrali (4.1.1-4.1.3).

Definizione di integrale di una funzione complessa su una curva (4.2.1)

Punti singolari isolati: funzione: $f(z) = \frac{1}{z}$ (2.7.5). Sua rappresentazione (inversione per raggi vettori reciproci: 3.1.10; si rende reale il denominatore). La circonferenza unitaria è unita, ma i punti con ascissa positiva si scambiano con quelli di ascissa negativa. Le circonferenze con raggio maggiore e minore di 1 si scambiano.
Proiezione stereografica della sfera.

Esempi ed esercizi:
Una funzione non costante che ha soltanto valori reali non può essere olomorfa (2.7.11); una funzione olomorfa che ha modulo costante è costante essa stessa (si deriva parzialmente sia rispetto ad x che rispetto ad y, e si fa sistema; poi si applicano le condizioni di Cauchy-Riemann e si risolve con la regola di Cramer: commenti sul determinante).

Le funzioni olomorfe hanno le componenti che sono funzioni armoniche (laplaciano nullo) (2.7.13).

Armoniche coniugate: si fissa una funzione armonica $u(x,y)$ e si cercano quelle $v(x,y)$ (ovviamente armoniche anch'esse) che rendono $u+iv$ olomorfa (2.7.16, in particolare formula (2.7.12)). Ovviamente, trovatane una, tutte quelle che differiscono per una costante (reale o complessa) sono del pari coniugate.

****

Non fanno parte del programma: i numeri si riferiscono al testo *Metodi matematici per l'ingegneria, vol. I - Funzioni di una variabile complessa*: la seconda parte di 2.3.4; 2.5; 2.6.5; 2.6.6; dim. di 2.7.6;2.7.7; 2.7.8; dim. di 2.7.9; 2.7.10.