CM85sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Quinta settimana

27.10.2008 - lunedì (2 ore)

Richiamo sulla definizione di derivata complessa.

Dove la funzione $f(z) = |z|^2$ è derivabile?
$f(z) = \frac{1}{h}(z+h)\overline{(z-h)} - z\overline{z}$
Semplificando si trova che $\frac{\overline{h}}{h}$ non ha limite (non ce l'ha neppure sui soli reali).

Vale ancora, anche per le funzioni di variabile complessa, la regola di L'Hôpital, vale ancora il principio di sostituzione degli infiniti e degli infinitesimi. Tendenza all'infinito dei polinomi, raffronto tra gli ordini di inifiito e di infinitesimo.

Definizione di funzione olomorfa (= derivabile) in una regione e primi esempi: esponenziale, polinomi, funzioni trigonometriche (2.7.1-2.7.2)

Accenno alla definizione di Cauchy (derivabile con derivata continua), precedente al lemma di Goursat.

Punti in cui la funzione non è derivabile mentre è derivabile in un loro intorno privo del punto si dicono *punti singolari isolati*: ad es. $z = 0$ in $1/z$.

Condizioni di Cauchy-Riemann in un punto: loro necessità (2.7.6, senza dim.)
La condizione non è sufficiente, ad esempio $f(z) = \sqrt{|xy|}$ soddisfa chiaramente le condizioni di C.-R., nell'origine, ma non è ivi derivabile (il limite su semirette diverse viene diverso). Negli altri punti fuori degli assi è derivabile.

Le condizioni di C.-R. (che sono condizioni in un punto) diventano anche sufficienti se la funzione è definita in una regione Ω e le derivate parziali $\partial u/\partial x = u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ esistono e sono anche continue in Ω. (2.7.9, senza dim.)

Esempi ed esercizi:
Una funzione olomorfa non costante che ha soltanto valori reali non può essere olomorfa: infatti le v_x e v_y sono nulle e quindi tali devono essere anche le u_x e u_y (2.7.11).
Una funzione olomorfa che ha modulo costante è costante essa stessa. Infatti si deriva parzialmente l'espressione $u^2(x,y)+v^2(x,y) = k^2$ sia rispetto ad x che rispetto ad y, (risulta $2u\partial u/\partial x$ ecc.) e si fa sistema (i secondi membri

vengono nulli); poi si applicano le condizioni di Cauchy-Riemann e si risolve con la regola di Cramer: commenti sul determinante (2.7.12).

Definizione di funzione *armonica*: soddisfa l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

Le funzioni olomorfe hanno le componenti che sono funzioni armoniche (laplaciano nullo) (2.7.13).

Armoniche coniugate: si fissa una funzione armonica $u(x, y)$ e si cercano quelle $v(x, y)$ (ovviamente armoniche anch'esse) che rendono $u+iv$ olomorfa. Si ottengono integrando da (x_0, y_0) a (x, y) la forma differenziale $v_x dx + v_y dy$. (2.7.16, in particolare formula (2.7.12)).
Ovviamente, trovatane una, tutte quelle che differiscono per una costante (reale o complessa) sono del pari coniugate.

Accenno alla trasformazione conforme (3.1.1).
Differenza tra trasformazione conforme e trasformazione isogonica. (3.1.3)

0.0.1 Teorema. *Se due curve γ_1 e γ_2 si intersecano in z_0 con un angolo α, le loro immagini tramite una funzione olomorfa h si intersecano in $h(z_0)$ e se $h'(z_0) \neq 0$ si intersecono con lo stesso angolo.(3.1.1, senza dim.)*

0.0.2 Teorema. *Una funzione olomorfa f induce una trasformazione conforme nell'intorno di ogni punto z_0 in cui è $f'(z_0) \neq 0$.(3.1.4)*

Ricordare le considerazioni sulle intersezioni delle immagini delle rette parallele agli assi, in particolar modo z^2 (nell'origine le immagini degli assi si incontravano ad angolo piatto). Invece $1/\overline{z}$ induceva una trasformazione isogonica, ma non conforme.
Ricordare e^z.

Punto all'infinito e proiezione stereografica della sfera.
Compattificazione tramite un punto solo.

Richiamo sulle curve, sugli integrali curvilinei, sulle forme differenziali e loro integrali (4.1.1-4.1.3).

Definizione di integrale di una funzione complessa su una curva regolare (4.2.1), sull'unione di curve regolari consecutive (additività: 4.2.2); l'integrale su un contorno si dice *circuitazione* (4.2.3).

Simbologia: $|dz| = |d(x + iy)| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$.
Maggiorazioni tra i moduli (4.2.3).

Formula di Darboux: se una funzione è continua lungo una curva regolare L di lunghezza ℓ, e su questa curva è $|f(z)| \leq M$, allora vale

$$| \int_L f(z)\, dz| \leq M\ell.$$

28.10.2008 - martedì (2 ore)

Richiamo sulle regioni a connessione multipla, sui contorni omologhi (che circondano la stessa parte della frontiera di Ω), contorni omologhi a 0.

Archi omologhi: se $\exists$ un terzo arco che abbia solo gli estremi in comune con i primi due, e tale che i contorni $\gamma_1 - \gamma_3$ e $\gamma_2 - \gamma_3$ siano omologhi tra loro (§1.4).
Esempi di contorni che *non* sono omologhi tra loro.

Lemma prioritario al teor. di Cauchy: su un contorno omologo a 0 la funzione 1 e la funzione z hanno integrale nullo (4.3.1).

Teorema di Cauchy (4.3.2), detto con la $f'(z)$ continua.
Inizio della dimostrazione (semplicemente scrivere l'integrale).

Racconto intuitivo del lemma di Goursat.

Teor. di Cauchy nella formulazione successiva al teor. di Goursat.

Il teor. di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse (4.3.5-4.3.8). Si considerano due contorni omologhi C e Γ, poi si effettua un "taglio" γ.

Immediata conseguenza del teor. di Cauchy è che l'integrale di una funzione olomorfa fatto su archi omologhi non dipende dall'arco, bensì soltanto dagli estremi.

Se Ω è una regione semplicemente connessa, tutti gli archi isoorientati che hanno gli stessi estremi sono omologhi e quindi risulta univocamente determinata la funzione

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\, dt$$

detta *funzione integrale*.
Vale il teor. (estensione del teor. di Torricelli) *Se f è olomorfa in una regione Ω semplicemente connessa, allora la funzione integrale è olomorfa e vale $F'(z) = f(z)$.*
(niente dim.)

Formula di Cauchy: *Si abbia un contorno C omologo a 0 in Ω; se a è un punto racchiuso da tale contorno vale:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

La dim. si basa sul fatto che si può dimostrare la formula abbastanza facilmente se C è una circonferenza di centro a, cosicché è $z - a = \rho e^{i\theta}$ da cui $dz = i\rho e^{i\theta}\, d\theta$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Allora vale

$$\oint \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \oint \frac{f(a)}{z-a}\, dz + \oint \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz$$

L'ultimo integrale va a 0 per la formula di Darboux: infatti la f è derivabile in a e quindi il limite del rapporto incrementale per $z \to a$ è finito. Pertanto il modulo del rapporto incrementale è limitato in un intorno di a. La lunghezza della circonferenza C la si può far diventare piccola quanto si vuole (la maggiorazione è del modulo), e il primo integrale del 2° membro vale $f(a) \cdot 2\pi i$ (attenzione: il libro porta erroneamente, nella formula successiva alla (4.4.4), $2\pi\rho$ invece che 2π).

Sembra strano che basti conoscere una funzione olomorfa su un contorno per conoscerla dentro; invece strano non è, perché una funzione olomorfa soddisfa un sistema di equazioni differenziali (le condizioni di Cauchy-Riemann), e quindi i valori su C sono i valori al contorno che determinano i valori della funzione all'interno del contorno stesso.

Considerazioni sul valore dell'integrale a seconda se a è dentro, fuori o su C. Se a è racchiuso dal contorno C, il rapporto incrementale *non* è una funzione olomorfa all'interno del contorno, e quindi l'integrale non è obbligato a risultare 0 per il teor. di Cauchy. È invece una funzione olomorfa entro C se a è esterno a C e quindi in questo caso l'integrale vale 0.
Se a è su C l'integrale non esiste, perché il rapporto incrementale non sarebbe una funzione continua.

Formula di Cauchy per la derivata prima:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$$

(niente dim.)

Formula di Cauchy per la derivata n-sima:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

(niente dim.)

Osservazione 4.4.18 (legittimazione della derivazione sotto il segno di integrale).

30.10.2008 - giovedì (2 ore)

Formula di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse.
(L'integrale è fatto sulla frontiera della regione, eventualmente costituita da più curve chiuse).

Dall'estensione del teorema di Torricelli si ha che la funzione integranda che compare nella definizione di funzione integrale non solo è continua, ma è derivabile con derivata continua, e quindi è olomorfa, e quindi ha tutte le derivate.

Di qui segue il teor. fondamentale del calcolo integrale: $\int_{z_0}^{z} f'(t)\ dt = f(z) - f(z_0)$.

Esempi da 4.4.4 a 4.4.7.

Calcolare l'integrale

$$\oint_C \frac{ze^z}{2-z}\ dz \qquad C = \{z : |z| = 10\}.$$

L'integrale vale il numeratore dell'integranda calcolato in $z = 2$, poi moltiplicato per $2\pi i$ e quindi cambiato di segno, quindi $-4e^2 \cdot 2\pi i$.
Si noti che il denominatore è $2 - z$, e non $z - 2$, e quindi giustamente va cambiato il segno.

Osservazione sulla media, quando il contorno è una circonferenza C ed a è il suo centro (*non vale* con un contorno qualsiasi, o se il punto a non è il centro).
Infatti in questo caso il contorno su cui si integra può essere parametrizzato dalla variabile reale θ che varia tra 0 e 2π. Il dz diventa pertanto $i\rho e^{i\theta}$.

Esercizi da 4.4.9 a 4.4.12.

Esercizio. - Trovare una funzione olomorfa che soddisfi, all'interno del cerchio $C = \{t : |t| = 4\}$,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad f''(z) = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{t^3 - 2t + 5}{(t-z)^3}\ dt$$

Evidentemente la f e il numeratore della funzione integranda hanno la stessa derivata seconda; basta trovarla derivando due volte il numeratore e riintegrarla imponendo alle primitive successive di soddisfare le condizioni. (vd. 4.4.19; attenzione: non è specificato, ma è ovvio, che l'uguaglianza in cui compare f'' vale per z interno a C).

Teorema della limitazione delle derivate successive:
Sia C una circonf. di centro z in una regione di olomorfia per f. Se $M(r) = \max_{t\in C}|f(t)|$ vale

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$$

(attenzione: per errore sul libro il centro è chiamato a.) Si scrive la formula di Cauchy per le derivate successive e si maggiora il modulo dell'integrale di $\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}$ con l'integrale del modulo e al denominatore viene
$|(t-z)^{n+1}| = r^{n+1}$, e $|dz| = ds$, per cui il 2π si semplifica.

Teorema di Liouville: *Una funzione olomorfa e limitata su tutto C è costante.*
Infatti la sua derivata prima risulta maggiorata in modulo da $\frac{M}{r}$ dove r può essere reso grande quanto si vuole, e quindi la derivata prima risulta nulla.

Esempio: il teor. fondamentale dell'algebra (il reciproco di un polinomio $\frac{1}{P(z)}$ tende a 0 per $z \to \infty$); se il polinomio non si annullasse mai il suo reciproco sarebbe una funzione olomorfa su tutto quanto $\mathbb{C}$, e sarebbe limitata: dentro ad un cerchio chiuso sarebbe limitata per il teor. di Weierstrass applicato alle sue componenti $u(x,y)$ e $v(x,y)$ e fuori del cerchio sarebbe in modulo minore di ϵ dato che tende a 0 per $z \to \infty$.

Esempio: si ricordi il calcolo delle soluzioni di $\sin z = 2$. Non limitatezza delle funzioni trigonometriche (vd. 2.3.12, 2.4.12, 2.4.13).

Introduzione all'enunciato del teor. di Cauchy-Taylor:

Teorema di Cauchy-Taylor: se $f(z)$ è olomorfa in un intorno di a, allora nel più grande cerchio aperto contenuto in tale intorno la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

risulta convergente e in tale cerchio risulta:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Esistono funzioni reali che sono $C^\infty(\mathbb{R})$, ma non si possono sviluppare in serie di Taylor, in quanto tutti i coefficienti sono nulli (vd. 5.3.10).

****

Non fanno parte del programma d'esame: 2.7.3; dim. di 2.7.6; 2.7.7; 2.7.8; dim. di 2.7.9; 2.7.10; 2.7.18; 2.7.20; da 2.7.22 a 2.7.25; dim. di 3.1.1; 3.1.7; 3.1.11; 3.1.14; 3.1.15; 3.2; tra gli es. proposti:6; dim. di 4.3.10; dim. di 4.4.13; dim. di 4.4.15; 4.4.16; 4.4.17; 4.5.1; 4.5.3; dim. di 4.5.4; 4.5.6; dim. di 5.1.5;