CM86sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Settima settimana

10.11.2008 - lunedì (2 ore)

0.0.1 TEOREMA. *(di Picard) - Data una f olomorfa, in un intorno di ogni singolarità essenziale la f assume tutti i valori complessi salvo al più uno, e li assume infinite volte.*

(niente dim.)

Regola pratica per il calcolo del residuo in un polo (del primo ordine) (p. 168).
Basta scrivere

$$f(z) = b_1(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 \ldots$$

e quindi moltiplicare per $(z-a)$ e fare il limite.
Se il polo è di ordine m basta moltiplicare per $(z-a)^m$ e derivare $m-1$ volte e dividere per $(m-1)!$

0.0.2 ESERCIZIO. Calcolare la natura delle singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{e^{2iz}-1}$$

Il denominatore si annulla in $2iz = \lg 1 = i(0+2K\pi)$ e quindi per $z = K\pi$; il numeratore si annulla (del secondo ordine) in $z = 2K\pi$. Consideriamo i limiti per $z \to K\pi$ quando K è pari e quando K è dispari. Quando K è pari si annullano sia numeratore che denominatore (il numeratore del secondo ordine e il denominatore del primo, quindi il limite viene 0). Negli altri punti si annulla solo il denominatore, e il limite viene infinito (polo del I ordine). Se non si vede subito il valore del limite, si applica L'Hôpital. □

0.0.3 ESERCIZIO. Si trovi la somma della serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-z}\right)^n$$

l'insieme dove è definita e il massimo prolungamento analitico della sua somma.
Deve essere $|z| < |z-1|$, cioè $x < 1/2$ e la somma è $\frac{1-z}{1-2z}$ che prolunga la serie all'intero piano $\mathbb{C}$ salvo $z = 1/2$. □

Esercizi da 1 a 10.

0.0.4 Teorema. *(dei residui) Sia f olomorfa in una regione salvo un numero finito di punti singolari z_k e sia γ un contorno che li circonda.*
Detti r_k =Res(z_k) $(k = 1, 2, 3, \ldots, N)$ i residui di f nei punti z_k si ha

$$\oint_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_1^N r_k$$

Dimostrazione. È il teor. di Cauchy-Laurent applicato ad ogni punto z_k, dove lo sviluppo in un intorno di ogni punto porta $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_k)^{-n+1}}\ dt$, e quindi per $n = 1$ si ha la tesi. (7.1) □

Attenzione: il teor. dei residui vale solo se il numero di singolarità all'interno di γ è finito, perché altrimenti ci sarebbe un punto di accumulazione che sarebbe ancora una sigolarità, che però non sarebbe più isolata e non varrebbe più il teor. di C.-L..

0.0.5 Esercizio. Calcolare lo sviluppo in serie di Cauchy-Laurent della funzione:

$$f(z) = \frac{z \cos z}{1 - \cos z}.$$

in un intorno di 0.

Verrà chiaramente un polo del I ordine. Uno z si semplifica, e sotto resta uno sviluppo con z in evidenza e il resto è uno sviluppo di Taylor. Basta rovesciare la serie al denominatore. □

0.0.6 Esercizio. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z-2}\ dz$$

dove γ è il cerchio di centro l'origine e raggio 4.

Chiaramente il punto $z = 2$ è dentro al cerchio. Per lo sviluppo di C.-L. in un intorno del punto 2 basta scrivere $e^z = e^{z-2}e^2$. Il residuo è $e^2 \cdot 1$, e quindi l'integrale vale $2\pi i e^2$.

Se il cerchio avesse avuto raggio 1 l'integrale era nullo; se avesse avuto raggio 2 l'integrale non esisteva perché la f non era continua in $z = 2$. □

0.0.7 Esercizio. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{e^{izt}}{t^2+1}\ dt$$

dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio $3/2$. (Attenzione: z è un numero fisso, la variabile complessa è t.)

I punti di singolarità sono in $z = \pm i$, che cadono entrambi nel cerchio. Basta quindi calcolare i due residui in questi due punti, che sono poli semplici. Il primo è dato da

$$\mathrm{Res}(i) = \lim_{t\to i} \tfrac{(t-i)e^{izt}}{t^2+1} = \tfrac{e^{-z}}{2i}$$

e l'altro viene col segno cambiato. □

Definizione di *derivata logaritmica* e di *residuo logaritmico* per una funzione che ha soltanto un numero finito n di singolarità, unicamente polari, in z_k $(k = 1, 2, 3, \ldots n)$:

$$\phi(z) = \tfrac{f'(z)}{f(z)}$$

Il nome viene dal fatto che la ϕ è la derivata del logaritmo di f, una volta che si sia scelta una determinazione del logaritmo. *Residui logaritmici* sono i residui della derivata logaritmica nei punti di singolarità (solo polare).

Lemma. *Sia f una funzione olomorfa con soltanto un numero finito di poli in una regione Ω e sia γ un contorno interno ad Ω sul quale f non abbia né zeri né singolarità; allora se n e p sono il numero di zeri e di poli di f interni a γ, ciascuno contato con il suo ordine (o la sua molteplicità), la somma dei residui logaritmici di f nei suoi poli è data da $n - p$.*
(niente dim.)

0.0.8 Teorema. *(dell'indicatore logaritmico) Sia f è una funzione olomorfa con soltanto un numero finito di poli in una regione Ω e sia γ un contorno interno ad Ω sul quale f non abbia né zeri né singolarità; allora se n e p sono il numero di zeri e di poli di f interni a γ, ciascuno contato con il suo ordine (o la sua molteplicità), vale la relazione*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = n - p.$$

Dimostrazione. Infatti l'integrale al primo membro si può calcolare con il teor. dei residui. I punti singolari dell'integranda sono gli zeri e i poli di f entro γ, e il teor. prec. dice che la somma dei residui in tali punti ẽ $n - p$. (7.2.4) □

N.B. - La tesi non vale se le singolarità non sono polari. Inoltre il numero $n - p$ è un risultato in blocco e non separa il numero di zeri da quello dei poli.

Notiamo che l'integrale di quel quoziente è l'integrale della derivata del logaritmo; la parte reale del logaritmo ha integrale nullo su γ e la parte immaginaria è un argomento e quindi la sua variazione può essere soltanto un numero intero di 2π.

0.0.9 TEOREMA. *(di Rouché) Siano f e g due funzioni olomorfe in una regione Ω e sia γ un contorno contenuto in Ω; su γ sia soddisfatta la relazione*

$$|f(z)| > |g(z)|$$

allora la funzione $F(z) = f(z) + g(z)$ e la funzione $f(z)$ hanno lo stesso numero di zeri entro γ.

DIMOSTRAZIONE. Si prende la differenza degli argomenti tra le due funzioni $f+g$ ed f: è $\arg(f+g) - \arg f = \arg\frac{(f+g)}{f}$. Si prende la funzione $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ la cui immagine non fa giri attorno all'origine al variare di z lungo il contorno γ. □

Attenzione: nella parte a sinistra della fig. 7.23 non è raffigurato un contorno; va invede disegnata una curva chiusa e *semplice*. La parte destra, che è quella utile per la dimostrazione del teorema, è giusta (l'immagine non è necessariamente un contorno).

Il teor. di Rouché può essere utile per calcolare il numero degli zeri interni ad un contorno.

0.0.10 ESERCIZIO. Il numero di soluzioni entro il cerchio unitario dell'equazione

$$e^z = az^n \qquad a \in \mathbb{R},\ a > e$$

è n.

Infatti sulla circonferenza di raggio 1 è $|e^z| = e^x$ e quindi $e^{-1} < |e^z| < e^1$; su tale circonferenza è $|az^n| = a > e$ e quindi le soluzioni di $az^n - e^z = 0$ sono tante quante le soluzioni di $az^n = 0$, che sono n, contati gli zeri con la dovuta molteplicità. □

Introduzione alle trasformate integrali: definizione delle trasformate di Fourier e di Laplace (anche bilatera). Nucleo di una trasformazione (dal vol. II del testo: § 3.3).

$$F(f) = \int_E f(x)K(\lambda, x)\, dx$$

Trasformate trigononometriche (l'integrale va da 0 a $+\infty$).

11.11.2008 - martedì (2 ore)

Trasformata di Fourier per funzioni di $L(\mathbb{R})$ (funzioni a valori complessi di variabile reale);

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

(talvolta la trasformata di Fourier di f si indica con $\hat{f}$).

Ogni funzione sommabile sulla retta ha F-trasf (il modulo dell'esponenziale è 1). La parte reale e il coefficiente dell'immaginario della F-trasf. non sono necessariamente sommabili sulla retta.

Formule di inversione (ricordare cosa è il *valore principale*).

Se la f è continua, viene $f(t)$; se non lo è, ma ammette limiti destro e sinistro, viene la semisomma dei due limiti); il secondo membro è:

$$\frac{1}{2\pi}\ vp\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega$$

(3.4.2; 3.4.3)

Ricordiamo che gli integrali sono fatti nella variabile reale ω e che sono costituiti di una parte reale e una immaginaria, come del resto sono i valori di f.

Se f è pari viene solo il coseno, se è dispari solo il seno (segno cambiato e moltiplicato per i).
Sen-trasformata, cosen-trasformata.

F-trasf di $f = e^{-a|t|}$ (Esempio 3.4.13).
(Attenzione: alla quinta riga c'e' un "+" invece che un "-").

Proprietà fondamentali della F-trasf.

0.0.11 Teorema. *La F-trasf è infinitesima per $\omega \to \infty$.*

Dimostrazione. Si può dimostrare singolarmente per la parte con il coseno e quella per il seno (prendiamo una sola delle due, l'altra è analogo). Si spezza l'integrale in due parti: tra $-N$ e $+N$ e il resto della retta (costituito da due semirette), prendendo N in modo tale che l'integrale sul resto sia piccolo in modulo (si può perché f è sommabile), e poi si applica Riemann-Lebesgue all'integrale sull'intervallo. $\square$

0.0.12 Teorema. *La F-trasf. è uniformemente continua.*

Definizione della continuità uniforme.
(niente dim.)

Limitatezza della F-trasformata (3.5.4)

Teorema della traslazione nel tempo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}\ dt = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(t)$$

Teorema della traslazione in frequenza (3.5.5)

Continuità assoluta (funzione di Cantor: § 1.8)

Teorema sulla F-trasf. della derivata:

$$\mathcal{F}(f^{(k)}) = (i\omega)^k \mathcal{F}(f)$$

(con dim.: 3.5.7)
Considerazioni sulla tendenza a zero della trasformata e sulla regolarità di f.

Derivazione in frequenza:

$$[\mathcal{F}(f)]^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}[t^n f(t)]$$

Considerazioni sulla regolarità della f.

Teorema dei momenti.

13.11.2008 - giovedì (2 ore)

Prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$ e teorema sulla trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione. (3.6)

Teorema del campionamento (3.7).

****
Non fanno parte del programma d'esame: da 6.1.34 a 6.2.4; § 6.3; la seconda domanda dell'es. 5 di p. 181; da p. 186 a p. 213; dim. di 7.2.3; 7.2.7; es. 5 degli esercizi proposti; dal Cap. 8 alla fine del I volume. Dal II volume: § 3.1, § 3.2; prima metà di p. 133; da 3.4.4 a 3.4.7; p. 138; dim. di 3.5.2; 3.5.6; da 3.5.11 a 3.5.14.