CM89sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2008-2009
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Nona settimana

24.11.2008 - lunedì (2 ore)

Commento della prova parziale
(vd. file CM8IcoA-B-C-D.pdf).

Definizione del prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$, sua associatività e commutatività, sua sommabilità
Teorema sulla trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione (3.6).
Menzione del teor. di Fubini-Tonelli sull'invertibilità dell'ordine di integrazione e sull'uguaglianza tra integrale doppio e integrale iterato.

Definizione di larghezza di banda:
banda rigorosamente limitata: se $\exists\ \omega_0 : [\mathcal{F}(f)](\omega) = 0$ per $|\omega| > \omega_0$;
banda praticamente limitata: detto $M = max|\hat{f}(t)|$ se $\exists\ \omega_0 : |[\mathcal{F}(f)](\omega)| < aM$ per $|\omega| > \omega_0$, dove solitamente $a = 0,05$.
L'estremo inferiore ω_0^* di tali ω_0 si dice *larghezza (convenzionale) di banda.*

Campionamento.

0.0.1 TEOREMA. *(di Shannon) - Sia F a banda rigorosamente limitata, e sia $\hat{f}(\omega) = 0$ per $|\omega| > \omega_0$. Allora*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} = f\Big(\frac{k\pi}{\omega_0}\Big)\frac{\sin[(\omega_0(t-(k\pi/\omega_0))]}{\omega_0(t-(k\pi/\omega_0))}$$

Grafico delle sinusoidi smorzate.

Caso particolare (accenno): la trasformata di Fourier della funzione

$$h(t) = A\ \mathrm{rect}\frac{t-t_0}{T},$$

che rappresenta una funzione che vale A per t compreso tra $t_0 - T/2$ e $t_0 + T/2$ e 0 altrove, risulta essere una sinusoide smorzata. In particolare, prendendo

$A = 1,\ t_0 = 0,\ T = 2a$ si ha $\hat{f} = 2\frac{\sin a\omega}{\omega}$ che non è sommabile su $\mathbb{R}$. Peraltro, se la si considera sommabile e si fa l'integrale generalizzato

$$G(\omega) = 2 \lim_{K\to+\infty} \int_0^K 2\frac{\sin at}{t} \cos\omega t\ dt$$

si ottiene proprio (quasi) la funzione rect, a parte due punti di discontinuitaà. Non si tratta di una trasformata di Fourier, ma quasi.

Peraltro, considerando nello spazio delle frequenze una funzione di tipo rect che vale 1 per $|\omega| \leq \omega_0$ e applicando a questa la formula di inversione si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\ e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi i t}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$$

che è un sinusoide smorzata.

Teorema del cambiamento di scala ($f(at)$). Notare che viene il fattore $1/a$.

25.11.2008 - martedì (2 ore)

Distinzione tra gli integrali di una funzione che ha integrale su una semiretta qualunque sia la successione di intervalli che la invade e invece

$$\lim_{K\to\infty} \int_0^K f(x)\ dx$$

che considera il limite su quella successione particolare di intervalli invadente la semiretta che cominciano sempre da 0 e terminano a K.

In generale, un integrale su un insieme su cui una funzione *non* è continua, oppure su un insieme non limitato, calcolato come limite di integrali fatti su una successione invadente tale insieme, si dice *integrale improprio* e il suo valore si dice *valore principale (di Cauchy)* e davanti al segno di integrale si scrive "v.p." per indicare che l'integrale è stato calcolato come limite di integrali fatti su una successione particolare. Un esempio è l'integrale di $\frac{1}{x}$ fatto come limite di integrali calcolati su successioni di coppie di intervalli *simmetrici rispetto all'origine*. Ovviamente, come per tutte le funzioni dispari, il suo valore principale è nullo. Un altro esempio, che interessa la $\mathcal{L}$-trasformata, è l'integrale dato come $\lim_{K\to\infty} \int_0^K f(t)\ e^{-st}\ dt$. A volte, per insistere che si tratta di quel tipo di integrale, invece che scrivere $\lim_{K\to\infty} \int_0^K f(t)\ e^{-st}\ dt$ si antepone una piccola freccia e si scrive:

$$\vec{\int_0^\infty} f(t)\ e^{-st}\ dt.$$

Introduzione alla trasformata di Laplace.

Valgono i seguenti teoremi:

I) Una funzione sempre positiva (o nulla) ha integrale (finito oppure $+\infty$) indipendente dalla successione.

II) Una funzione ha integrale finito indipendente dalla successione se e solo se il suo modulo $|f(x)|$ ha integrale finito (L'integrale del modulo, stante il teor. precedente, è indipendente dalla successione).
Naturalmente ciò riguarda la finitezza oppure no degli integrali; il loro*valore*, se la f non è sempre dello stesso segno,*è chiaramente diverso*.

Ovviamente, se una funzione ha integrale finito *indipendente dalla successione*, il calcolo viene poi effettuato su una particolare successione "comoda", che molto spesso è proprio la successione di intervalli simmmetrici rispetto ad un punto di non continuità o, sulla retta, la successione degli intervalli simmetrici $[-K, K]$, o, sulla semiretta, la successione degli intervalli $[0, K]$. Poiché il calcolo viene sempre effettuato così, nella pratica ingegneristica viene perduto il senso della eventuale dipendenza dell'integrale dalla successione invadente e viene chiamato tranquillamente "integrale" quello che è invece il valore principale.

Ovviamente, stante il teor. I), una funzione che ha integrale su una retta (o semiretta) dipendente dalla successione invadente la retta (o semiretta) può essere solo una funzione di segno variabile. L'unica che abbiamo incontrato di questo tipo è la sinusoide smorzata $\frac{\sin t}{t}$ il cui integrale non esiste finito (l'integrale del modulo risulta $+\infty$), ma il cui valore principale fatto come limite per $K \to \infty$ degli integrali sulla successione di intervalli $[0, K]$ è invece finito (vale $\frac{\pi}{2}$).

Noi considereremo solo la *trasformata assoluta* di Laplace, cioè la trasformata di quelle funzioni per le quali esiste finito l'integrale del modulo (def. 4.1.11, p. 168) e tutte le volte che parleremo di "integrale" intenderemo, a meno che non sia specificato altrimenti, l'integrale effettivo, non semplicemente il valore principale.

Definizione dello spazio $L_{loc}\mathbb{R}_0^+$.

Definizione di trasformabilità assoluta (4.1.11) e di trasformata assoluta (4.1.14). Si noti la possibilità (che noi applicheremo sempre) di omettere l'aggettivo "assoluta".

Esistenza della trasformata (assoluta) in un semipiano (enunciato del teor. 4.1.12), che si dirà *semipiano di convergenza*.

Ascissa di convergenza (assoluta), indicata con ρ (4.1.15).

Calcolo della $\mathcal{L}$-trasformata della funzione di Heaviside (funzione "gradino"), dell'esponenziale e^{kt}, delle funzioni seno e coseno come combinazioni lineari di esponenziali (tali trasformate sono anche assolute, quindi non viene evidenziata differenza).

Trasformabilità delle funzioni $\mathcal{O}(e^{kt}), \quad \mathcal{O}(t^k)$. Trasformabilità dei polinomi (4.2.6).

Convergenza uniforme di un integrale.

Uniforme convergenza dell'integrale di Laplace su un angolo convesso del suo semipiano di convergenza (teor. 4.2.1, dove ρ^* è da intendersi l'ascissa di convergenza assoluta ρ).

Tendenza a 0 della trasformata entro un angolo convesso (4.2.7, senza dim.)

Tendenza a 0 di $\frac{[\mathcal{L}(f)](s)}{s}$ sulle rette verticali (4.2.10).

27.11.2007 - giovedì (2 ore)

Esempio di funzione pur localmente sommabile che non ha trasformata di Laplace per nessun valore di s (4.1.8).

Esistenza dell'integrale di Laplace per tutte le funzioni sommabili (e non soltanto localmente sommabili), e tendenza a zero di tale integrale per tutti gli s con Re(s)$\geq$ 0 (4.2.8, 4.2.9).

Prima formula fondamentale e olomorfia della $\mathcal{L}$-trasformata (4.2.12)

$$[\mathcal{L}(f)]^{[n]} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n \; f(t))$$

Confronto con la trasformata di Fourier riguardo alla derivabilità e tendenza a zero.

Trasformata di $\frac{f(t)}{t}$:

$$\mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big) = \int_s^\infty [\mathcal{L}(f)](\sigma)\ d\sigma$$

Si noti che l'integrale va da un punto s all'infinito su un qualsiasi cammino interno ad una ngolo convesso del tipo $A(s_0, \theta)$.
Si fa prima la derivata della trasformata di $Fft)/t$ e viene $-\mathcal{L}(f)$, e poi si integra da s_0 a s e viene un $+c$; ma poiché il primo membro è una trasformata, deve tendere a 0 e quindi l'integrale da s_0 all'infinito vale c, e quindi rimane l'integrale da s all'infinito.

****

Non fanno parte del programma d'esame: 3.8.1; 3.8.2; da 3.8.6 alla fine del Cap. 3; 4.1.3; 4.1.6; 4.1.22; dim. di 4.2.1; 4.2.3; dim. di 4.2.7; dim. di 4.2.12.