COMPLEMENTI DI MATEMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrotecnica
Prova parziale del 20.11.2008 Tempo concesso: 90 minuti

Tema A

1. Si dia la definizione di densità; in quale tipo di spazi ha senso? Su uno spazio vettoriale normato ha sempre senso parlare di densità?
   In che dimostrazione è stato sfruttato il fatto che $C^1([a,b])$ è denso in $L^1([a,b])$?
2. Si definisca la funzione *potenza* nel campo complesso; si dica quando questa funzione è univoca, plurivoca con un numero finito di valori, plurivoca con un numero infinito di valori, giustificando le risposte.
3. In quale tipo di spazio il problema della migliore approssimazione in norma ha sempre soluzione? e quale è?
4. Si definisca la funzione $f(z) = e^z$ e si trovi la sua immagine nel piano complesso. Il punto (1,0) è l'immagine di quale insieme?
5. Risolvere nel campo complesso l'equazione $\sin z = 4$.
6. Sullo spazio $C^0([-\pi, \pi])$ abbiamo considerato tre norme: quella che gli è propria e quelle che sono indotte dagli spazi $L^2([-\pi, \pi])$ e $L([-\pi, \pi])$ che contengono $C^0([-\pi, \pi])$. Presentare singolarmente le tre norme, proponendo anche qualche esempio di successione che converge secondo una di queste ma non secondo le altre.
7. Una serie di Fourier uniformemente convergente su $\mathbb{R}$ è anche puntualmente convergente a una funzione continua? Se sì, dimostrarlo, se no trovare un controesempio.
8. Si dica perché la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos nx;$$
   è una serie di Fourier e perché se ne può effettuare la derivazione per serie.
9. La funzione $f(z) = |z|^2$ è olomorfa in qualche regione di $\mathbb{C}$? Perché?
   È derivabile in qualche punto?
10. Si illustri il motivo per cui una funzione non costante che vale i sul segmento $[-i, +i]$ dell'asse immaginario non può essere la restrizione agli immaginari puri di una funzione analitica su $\mathbb{C}$.