

## COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Prova parziale del 20.11.2008

Tempo concesso: 90 minuti

**Tema D**

1. Si definisca un polo di ordine  $m$ .  
Si scriva poi la serie di Cauchy-Laurent di  $f(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$  nel punto  $a = 0$  con i termini ad esponente negativo e arrestata al termine contenente il monomio di 2° grado per quelli a esponente positivo.
2. Si dia un esempio di prolungamento di una funzione olomorfa che conduce ad una funzione plurivoca, illustrando il procedimento.
3. Si dia la definizione di spazio metrico *completo*. Uno spazio di Hilbert è uno spazio metrico completo? Rispetto a quale norma?
4. Sullo spazio  $\ell^2$  è stato definito un prodotto scalare. In che modo? e quale è la norma che deriva da questo prodotto scalare?
5. Una serie di potenze si può sempre derivare per serie? in quali insiemi?
6. Presentare due serie di Fourier per una delle quali è valida la derivazione per serie mentre per l'altra no, spiegando il motivo della diversità.
7. In che regione vale lo sviluppo in serie di Cauchy-Taylor di centro 2 della funzione  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ?
8. Una funzione olomorfa di modulo costante è costante. Dimostrarlo.
9. Quando una trasformazione di  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$  si dice *conforme*? Nell'intorno di quali punti una funzione olomorfa induce una trasformazione conforme? Verificare che la funzione  $f(z) = z^2$  non induce una trasformazione conforme nell'intorno dell'origine.
10. Quali sono le immagini delle rette parallele agli assi coordinati tramite la funzione  $f(z) = e^z$ ?