CM910sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2009-2010
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

30.11.2009 - lunedì (2 ore)

Introduzione alle trasformate integrali: definizione delle trasformate di Fourier e di Laplace (anche bilatera). Nucleo di una trasformazione (dal vol. II del testo: § 3.3).

$$F(f) = \int_E f(x)K(\lambda, x)\ dx$$

Trasformata di Fourier per funzioni di $L(\mathbb{R})$ (funzioni a valori complessi di variabile reale);

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt$$

(talvolta la trasformata di Fourier di f si indica con $\hat{f}$).

Ogni funzione sommabile sulla retta ha F-trasf (il modulo dell'esponenziale è 1). La parte reale e il coefficiente dell'immaginario della F-trasf. non sono necessariamente sommabili sulla retta.

Se f è pari viene solo il coseno, se è dispari solo il seno (segno cambiato e moltiplicato per i).
Sen-trasformata, cosen-trasformata (3.4.9; l'integrale va da 0 a $+\infty$).

0.0.1 TEOREMA. *La F-trasf è infinitesima per $\omega \to \infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Si può dimostrare singolarmente per la parte con il coseno e quella per il seno (prendiamo una sola delle due, per l'altra è analogo). Si spezza l'integrale in due parti: tra $-N$ e $+N$ e il resto della retta (costituito da due semirette), prendendo N in modo tale che l'integrale sul resto sia piccolo in modulo (si può perché f è sommabile), e poi si applica Riemann-Lebesgue all'integrale sull'intervallo. $\square$

Definizione di continuità uniforme (c'è un δ che va bene per tutti i punti di un insieme); ricordare che *non ha senso* dire che una funzione è uniformemente continua in un punto!

Uniforme continuità della $\mathcal{F}$-trasformata (3.5.2, senza dim.)

Limitatezza della $\mathcal{F}$-trasformata (3.5.4)

Teorema della traslazione nel tempo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}\,dt = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(t)$$

Teorema della traslazione in frequenza (3.5.5)
Teorema del cambio di scala: si trasformi $f(\lambda t)$: si ottiene $1/\lambda$ moltiplicato la trasformta di $f(t)$ calcolata nel punto ω/λ.

1.12.2009 - martedì (2 ore)

Continuità assoluta (funzione di Cantor: § 1.8)
L'insieme su cui la derivata non è zero è di misura nulla, eppure è denso nell'intervallo $[0,1]$, e i suoi elementi sono quelli che in forma ternaria si scrivono come allineamenti ternari (che utilizzano solo le cifre 0, 1, 2) che *non* contengono la cifra 1 (quella cifra identifica un numero che si trova in un terzo centrale)

Formule di inversione (ricordare cosa è il *valore principale*: è il valore che si ottiene facendo il limite degli integrali calcolati su una particolare successione che invade l'insieme; esempio con $1/x$ con l'integrale fatto su coppie di intervalli simmetrici rispetto all'origine; $\sin x/x$ con l'integrale fatto sulla successione di intervalli del tipo $[0,k]$).

Notare che viene il fattore $1/2\pi$; se si fosse data come definizione di trasformata di Fourier una formula con $1/\sqrt{2\pi}$ si avrebbe una formula di inversione perfettamente simmetrica.

Se la f è continua, viene $f(t)$; se non lo è, ma ammette limiti destro e sinistro, viene la semisomma dei due limiti; il secondo membro è:

$$\frac{1}{2\pi}\ vp\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

(3.4.2; 3.4.3)

Ricordiamo che gli integrali sono fatti nella variabile reale ω e che sono costituiti di una parte reale e una immaginaria, come del resto sono i valori di f.

Provare a casa:
F-trasf di $f = e^{-a|t|}$ (Esempio 3.4.13).

(Attenzione: alla quinta riga c'è un "+" invece che un "-").

Teorema sulla F-trasf. della derivata:

$$\mathcal{F}(f^{(k)}) = (i\omega)^k \mathcal{F}(f)$$

(con dim.: 3.5.7)
Considerazioni sulla tendenza a zero della trasformata e sulla regolarità di f; parallelo con la tendenza a 0 dei coefficienti della serie di Fourier

3.12.2009 - giovedì (2 ore)

Derivazione in frequenza:

$$[\mathcal{F}(f)]^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}[t^n f(t)]$$

Considerazioni sulla sommabilità della f.

Teorema dei momenti.

Prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$ e teorema sulla trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione. (3.6)

Per casa: 3.8.1
Teorema del campionamento (3.7).

Esempio 3.8.3 nel caso della funzione pari che vale 1 per $|t| < a$.
Risulta $\hat{f}(\omega) = 2\mathcal{F}_c(f) = 2\int_0^a \cos\omega t \; dt = 2\frac{\sin a\omega}{a}$.
Notare che qesta funzione non è sommabile su $\mathbb{R}$, anche se esiste il valore principale di Cauchy.

Introduzione alla trasformata di Laplace e alla trasformata assoluta. Convergenza in un semipiano (4.1.3, solo enunciato).

****

Non fanno parte del programma d'esame: dal II volume: § 3.1, § 3.2; prima metà di p. 133; dalla seconda metà di p. 134 al 3.4.7; 3.4.10; 3.4.11; p. 138; dim. di 3.5.2; 3.5.6; da 3.5.11 a 3.5.14; 3.8.2; da p. 151 al termine del cap. 3; dim. di 4.1.3.