CM911sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2009-2010
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

10.12.2009 - giovedì (2 ore)

Definizione di larghezza di banda:
banda rigorosamente limitata: se $\exists\ \omega_0 : [\mathcal{F}(f)](\omega) = 0$ per $|\omega| > \omega_0$;
banda praticamente limitata: detto $M = max|\hat{f}(t)|$ se $\exists\ \omega_0 : |[\mathcal{F}(f)](\omega)| < aM$ per $|\omega| > \omega_0$, dove solitamente $a = 0,05$.
L'estremo inferiore ω_0^* di tali ω_0 si dice *larghezza di banda*, o nel secondo caso *larghezza convenzionale di banda.*

Campionamento

0.0.1 TEOREMA. *(di Shannon) - Sia F a banda rigorosamente limitata, e sia $\hat{f}(\omega) = 0$ per $|\omega| > \omega_0$. Allora*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\Big(\frac{k\pi}{\omega_0}\Big) \frac{\sin[(\omega_0(t-(k\pi/\omega_0))]}{\omega_0(t-(k\pi/\omega_0))}$$

Grafico delle sinusoidi smorzate.

Caso particolare (accenno): la trasformata di Fourier della funzione

$$h(t) = A\ \mathrm{rect}\frac{t-t_0}{T},$$

che rappresenta una funzione che vale A per t compreso tra $t_0-T/2$ e $t_0+T/2$ e 0 altrove, risulta essere una sinusoide smorzata. In particolare, prendendo $A = 1,\ t_0 = 0,\ T = 2a$ si ha $\hat{f} = 2\frac{\sin a\omega}{\omega}$ che non è sommabile su $\mathbb{R}$. Peraltro, se la si considera sommabile e si fa l'integrale generalizzato

$$G(\omega) = 2 \lim_{K\to+\infty} \int_0^K 2\frac{\sin at}{t} \cos\omega t\ dt$$

si ottiene proprio (quasi) la funzione rect, a parte due punti di discontinuità. Non si tratta di una trasformata di Fourier, ma quasi.

Peraltro, considerando nello spazio delle frequenze una funzione di tipo rect che vale 1 per $|\omega| \leq \omega_0$ e applicando a questa la formula di inversione si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\ e^{i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi i t}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$$

che è un sinusoide smorzata.

Introduzione alla trasformata di Laplace.

Valgono i seguenti teoremi:

I) Una funzione sempre positiva (o nulla) ha integrale (finito oppure $+\infty$) indipendente dalla successione.

II) Una funzione ha integrale finito indipendente dalla successione se e solo se il suo modulo $|f(x)|$ ha integrale finito (L'integrale del modulo, stante il teor. precedente, è indipendente dalla successione).
Naturalmente ciò riguarda la finitezza oppure no degli integrali; il loro*valore*, se la f non è sempre dello stesso segno,*è chiaramente diverso*.

Ovviamente, se una funzione ha integrale finito *indipendente dalla successione*, il calcolo viene poi effettuato su una particolare successione "comoda", che molto spesso è proprio la successione di intervalli simmmetrici rispetto ad un punto di non continuità o, sulla retta, la successione degli intervalli simmetrici $[-K, K]$, o, sulla semiretta, la successione degli intervalli $[0, K]$. Poiché il calcolo viene sempre effettuato così, nella pratica ingegneristica viene perduto il senso della eventuale dipendenza dell'integrale dalla successione invadente e viene chiamato tranquillamente "integrale" quello che è invece il valore principale.

Ovviamente, stante il teor. I), una funzione che ha integrale su una retta (o semiretta) dipendente dalla successione invadente la retta (o semiretta) può essere solo una funzione di segno variabile. L'unica che abbiamo incontrato di questo tipo è la sinusoide smorzata $\frac{\sin t}{t}$ il cui integrale non esiste finito (l'integrale del modulo risulta $+\infty$), ma il cui valore principale fatto come limite per $K \to \infty$ degli integrali sulla successione di intervalli $[0, K]$ è invece finito (vale $\frac{\pi}{2}$).

Noi considereremo solo la *trasformata assoluta* di Laplace, cioè la trasformata di quelle funzioni per le quali esiste finito l'integrale del modulo (def. 4.1.11, p. 168) e tutte le volte che parleremo di "integrale" intenderemo, a meno che non sia specificato altrimenti, l'integrale effettivo, non semplicemente il valore principale.

Definizione dello spazio $L_{loc}\mathbb{R}_0^+$.

Definizione di trasformabilità assoluta (4.1.11) e di trasformata assoluta (4.1.14). Si noti la possibilità (che noi applicheremo sempre) di omettere l'aggettivo "assoluta".

Esistenza della trasformata (assoluta) in un semipiano (enunciato del teor. 4.1.12), che si dirà *semipiano di convergenza*.

L'integrale di Laplace può convergere per certi s e per altri no.
Ripresa dello spazio $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$.

Non tutte le funzioni di $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ hanno trasformata di Laplace: e^{t^2} non ce l'ha, in quanto l'integrale non converge per nessun s.
Semipiano di convergenza (assoluta) (4.1.12, senza dim.).
Ascissa di convergenza (assoluta) (a.d.c.): è l'estremo inferiore delle parti reali di quegli s per i quali l'integrale converge.
Viene indicata con ρ (4.1.15).

Calcolo della $\mathcal{L}$-trasformata della funzione di Heaviside (funzione "gradino"), dell'esponenziale e^{kt}, delle funzioni seno e coseno come combinazioni lineari di esponenziali (tali trasformate sono anche assolute, quindi non viene evidenziata differenza).

Trasformabilità delle funzioni del tipo $\mathcal{O}(e^{kt})$, $\mathcal{O}(t^k)$, con a.d.c. k e 0 rispettivamente.
Trasformabilità dei polinomi (4.2.6).

Convergenza uniforme di un integrale.

Convergenza uniforme dell'integrale di Laplace in un angolo convesso (teor. 4.2.1, dove ρ^* è da intendersi l'ascissa di convergenza assoluta ρ).

Trasformabilità delle funzioni limitate ($\rho \leq 0$), dei polinomi (4.2.6); le funzioni a supporto compatto ($\rho = -\infty$).

Tendenza a 0 della trasformata entro un angolo convesso (4.2.7, senza dim.)