CM912sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2009-2010
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

14.12.2009 - lunedì (2 ore)

Nomenclatura sulla funzione di Heaviside, la sua simmetrica e le traslate di entrambe (4.1.9, 4.1.10)

Definizione di trasformabilità assoluta (4.1.11) e di trasformata assoluta (4.1.14).
Ci occuperemo sempre soltanto di trasformate assolute, per le quali esiste l'integrale del modulo e quindi l'integrale si può eseguire su qualunque successione che invade la semiretta dei reali non negativi.
Peertanto conveniamo di omettere sempre l'aggettivo "assoluta", essendo questo l'unico nostro campo di indagine.

Esistenza della trasformata (assoluta) in un semipiano (enunciato del teor. 4.1.12), che si dirà *semipiano di convergenza.*

Ascissa di convergenza (assoluta) e retta di convergenza (prima metà di 4.1.16)

Esempi semplici: esponenziali, seno, coseno, funzioni iperboliche e calcolo delle loro ascisse di convergenza (da 4.1.18 a 4.1.21)

Definizione di convergenza uniforme di un integrale (quando la T della formula (4.2.1) non dipende dal punto s).

Teorema sulla convergenza uniforme dell'integrale di Laplace (4.2.1 dove l'enunciato va formulato per la trasformata assoluta e per l'ascissa ρ di convergenza assoluta). Il teorema vale anche per la trasformata non assoluta, cosa che trascuriamo.

Ovviamente il teorema vale anche per un qualsiasi compatto contenuto all'interno del semipiano di convergenza (4.2.3).

Definizione del simbolo di Landau $\mathcal{O}$ (nota 2 di pag. 173)

Trasformabilità di fuzioni che sono $\mathcal{O}$ di esponenziali e di monomi (4.2.4; 4.2.5)

Trasformata di t^n ottenuta direttamente per iterazione tramite l'integrazione per parti:

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(Nel testo il risultato è ottenuto come caso particolare della determinazione principale di t^α con α complesso, ed è la formula (4.2.29) di p. 178).

Trasformabilità delle funzioni limitate (4.2.6).

Tendenza a zero per $s \to \infty$ entro l'angolo convesso (4.2.7). Tendenza a 0 nel caso che la f sia sommabile e non semplicemente localmente sommabile (4.2.9).

Tendenza a zero del quoziente della trasformata diviso s lungo le rette verticali (4.2.10; 4.2.11).

15.12.2009 - martedì (2 ore)

Olomorfia della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza: Data una f $\mathcal{L}$-trasformabile la sua trasformata è una funzione olomorfa nel suo semipiano di convergenza; inoltre se f è (assolutamente) trasformabile, lo è anche $t^n f(t)$ nello stesso semipiano, e in tale semipiano si ha

$$[\mathcal{L}(f)]^{[n]} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n\ f(t))$$

Prima formula fondamentale di Laplace(vd. 4.2.12, senza dim.).

Confronto con la trasformata di Fourier riguardo alla derivabilità e tendenza a zero.

Trasformata di $\frac{f(t)}{t}$:

$$\mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big) = \int_s^\infty [\mathcal{L}(f)](\sigma)\ d\sigma$$

Si noti che l'integrale va da un punto s all'infinito su un qualsiasi cammino interno ad un angolo convesso del tipo $A(s_0, \theta)$.

Si fa prima la derivata della trasformata di $f(t)/t$ e viene $-\mathcal{L}(f)$, e poi si integra da s_0 a s e viene un $+c$; ma poiché il primo membro è una trasformata, deve tendere a 0 e quindi l'integrale da s_0 all'infinito vale c, e quindi rimane l'integrale da s all'infinito (4.2.15). Si noti che siamo su un semipiano, qindi una regione connessa e pertanto quando si integra risulta una costante sola, che si determina ponento che la funzione a primo membro valga 0 all'infinito.

Esempi vari (4.2.16; 4.2.17).

Traslazioni e cambiamento di scala, applicati alla trasformata assoluta (sarebbero veri anche per la trasformata non assoluta) (4.3.1; 4.3.2; 4.3.3; 4.3.4 limitatamente all'esponente naturale).

Esempio 4.3.4 limitato all'esponente naturale (formula (4.3.5)).

Esempio 4.3.5: la funzione è localmente sommabile: il numeratore tende a 0 del primo ordine e quindi il quoziente tende a un limite finito per $t \to 0$ (regola di L'Hôspital, il limite risulta $\alpha - \beta$). Però la frazione non si può spezzare, perché i singoli addendi non sono localmente sommabili. L'integrale non dipende dal cammino; attenzione al fatto che si prende la determinazione principale del logaritmo.

Trasformata delle funzioni periodiche (4.3.7 senza dim.)

17.12.2009 - giovedì (2 ore)

Trasformazione per serie e prolungamento analitico (4.3.11).

Convoluzione in $\mathbb{R}_0^+$ (4.4.1, 4.4.2); esistenza del prodotto di convoluzione e sua appartenza alle funzioni localmente sommabili sulla semiretta positiva.

Teorema di convoluzione (enunciato con entrambe le funzioni assolutamente trasformabili nelle ipotesi, e nella tesi risulta che il prodotto di convoluzione è assolutamente trasformabile.)
Attenzione all'ascissa di convergenza: potrebbe essere minore della massima tra le due delle due funzioni.

Teorema sull'assoluta trasformabilità dell'integrale $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$, e la sua trasformata è $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right) = \mathcal{L}(f)/s$ (4.5.2).

Teorema sulla trasformata della derivata prima(4.5.4):

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

Attenzione alla locale assoluta continuità e all'a.d.c. (minore o uguale alla più grande tra 0 e quella di f).

Generalizzazione alla derivata n-sima.

Prime applicazioni (4.8.1, 4.8.2).

Applicazioni alle equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti. Commenti sul risultato.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (4.8.3; 4.8.4).

Esempio 4.8.5.

****

Non fanno parte del programma d'esame: dal II volume: la seconda metà di pag. 163; da 4.1.2 a 4.1.7; dim. di 4.1.12; seconda metà di 4.1.16; le formule (4.1.28) e (4.1.29); 4.1.22; dim. di 4.2.1; dim. di 4.2.4; dim. di 4.2.5; dim. di 4.2.7; dim. di 4.2.12; 4.2.18 salvo la formula (4.2.29); 4.2.29; dim. di 4.3.7; 4.3.8; 4.3.10; 4.4.4; dim. di 4.4.5; 4.5.1; dim. di 4.5.2; § 4.6.