CM913sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2009-2010
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

6.1.2010 - giovedì (2 ore)

Ripresa della soluzione di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (4.8.4):

$$ay'' + by' + cy = f(t); \qquad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y_1$$

applicando la trasformata si ha:

$$a[s^2\mathcal{L}(y) - sy_0 - y_1] + b[s\mathcal{L}(y) - y_0] + c\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f) \Longrightarrow$$

$$[as^2 + bs + c]\mathcal{L}(y) = ay_0 s + ay_1 + by_0 + \mathcal{L}(f) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{ay_0 s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c} + \frac{\mathcal{L}(f)}{as^2 + bs + c}$$

Si tratta di trovare le *antitrasformate* dei due termini, che chiameremo $h(t)$ e $f(t) * g(t)$; antitrasformando troviamo:

$$y = h + f * g$$

$h(t)$ dipende da due costanti (e qui intervengono le condizioni di Cauchy), mentre la $g(t)$ dipende solo dal primo membro dell'equazione differenziale; h si dice *evoluzione libera*, $g * f$ si dice *evoluzione forzata*.

Se l'equazione fosse omogenea la soluzione sarebbe la sola $h(t)$; se il problema di Cauchy avesse le condizioni iniziali nulle, la soluzione sarebbe $f * g$.

Suponiamo che le radici dell'eq. caratteristica siano α_1 e α_2 distinte, avremmo la formula (4.8.18) con i denominatori $s - \alpha_1$ ed $s - \alpha_2$ e quindi il sistema fondamentale di integrali:

$$e^{\alpha_1 t}, \quad e^{\alpha_2 t};$$

i numeratori $A,\ B,\ C,\ D$, che sono reali se l'equazione è a coefficienti reali, daranno la soluzione del problema di Cauchy (unica, dato che siamo nelle ipotesi del teor. di esistenza e unicità).

È da notare che se le soluzioni sono complesse, quando i cofefficienti dell'equazione lineare sono reali, stanti le formule di Eulero, le esponenziali con esponenti complessi dànno combinazioni lineari di seni e coseni con coefficienti reali.

Se le radici fossero una sola doppia α, avremmo

$$\mathcal{L}(h) = \frac{M}{s-\alpha} + \frac{N}{(s-\alpha)^2}$$

e quindi il sistema sarebbe $e^{\alpha t}$, $te^{\alpha t}$.

Inversione di una trasformata di Laplace in alcuni casi particolari: formula (4.10.4) e oss. 4.10.2 (esclusa la parte scritta in piccolo).
Notare che il secondo membro della (4.10.4) è

$$\frac{1}{2\pi i} vp \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s)\ ds$$

L'integrale va su una retta parallela all'asse degli immaginari. Tale integrale non dipende da x perché su ogni parallela l'integrale ha lo stesso valore.

La funzione e^{-ks} è una trasformata di Laplace? No (vd. 4.10.10)

Applicazione ad alcune equazioni integrali:

$$y(t) = H(t) + \int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau)\ d\tau$$

da cui, posto $\mathcal{L}(y) = Y(s)$, si ha:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \mathcal{L}(\sin t)\ Y(s) \Longrightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s^2+1}}$$

da cui $Y(s) = 1/s + 1/s^3$, $Re(s) > 0$, e la soluzione, antitrasformando è $y(t) = 1 + t^2/2$, $t > 0$.
(seconda metà di 4.12.1).

Problema integro-differenziale:

$$4y(t) - y'(t) = 5\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\ d\tau + 5\sin t; \qquad y(0) = 0$$

Applicando la trasformata di Laplace si ha un prodotto di trasformate e quindi un'equazione razionale fratta per Y(s), che quindi si può facilmente antitrasformare.
(4.12.3).

Sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Si potrebbero anche risolvere eliminando un'incognita e passando ad una equazione del secondo ordine, mantenendo le due condizioni iniziali; vd. 4.12.4.

In quale problema di Cauchy si trasformerebbe, derivandola, la seguente equazione integrale?

$$y(t) = \int_0^t y(\tau)\ d\tau + e^t \ ?$$

$y'(t) = y(t) + e^t; \qquad y(0) = 1$

Distribuzioni

Definizione di supporto.
Funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto (spazio $\mathcal{D}$). Topologia nello spazio di tali funzioni (vd. 5.1.5).
Cosa significa "funzionale continuo" su $\mathcal{D}$.
Definizione di distribuzione (5.1.9).

Il funzionale T_f; lo possiamo considerare "gemello" di una funzione. È un funzionale continuo si $\mathcal{D}$.
****

Non fanno parte del programma d'esame: § 4.9; § 4.10 ad eccezione della formula (4.10.4) e di 4.10.10; § 4.11 ad eccezione di 4.11.19; 4.12.2; 4.12.5; 4.12.7; 4.12.8; da 4.12.14 alla fine del § 4.12; degli "esercizi proposti": 4; 10; 17; 19; 22; 27; 32;; 36; da 39 a 41; 49; 50; 51; 55; 56; 65; 67; 72; 73; 80; 83.