CM92sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2009-2010
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

Seconda settimana (5-10.10.2009)

lunedì 5.10.2009

Richiamo su spazi metrici (con distanza), spazi vettoriali, spazi (vettoriali) normati, spazi metrici.

Convergenza in uno spazio metrico: convergenza secondo Cauchy, completezza. (1.1.14, 1.1.15)
Esempio sui reali (completi secondo la norma $||x|| = |x|$) e sui razionali (non completi) (1.1.16)

Convergenza secondo Cauchy in uno spazio topologico; *completezza.*
Uno spazio normato completo si dice *spazio di Banach.*

Densità (1.1.19).
I reali sono densi in sé, i razionali sono densi in sé e anche densi nei reali (1.1.20).

Definizione di una **serie numerica**: è un'operazione composta di due passi:
1) data una successione $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, si considera la successione delle somme parziali $\{a_1, a_1 + a_2, \cdots \sum_{i=1}^{n} a_i, \ldots\}$; 2) esplorazione dell'esistenza del limite della successione delle somme parziali.
Se il limite esiste finito S, si dice che la serie è convergente e S si dice sua *somma*; se il limite esiste infinito, si dice che la serie è divergente; se il limite non esiste né finito né infinito, si dice che la serie è indeterminata.

Lo spazio ℓ^2 (1.1.28):
è costituito da successioni $\{a_i\}$ tali che
$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < +\infty.$
Definizione di somma (la successione della somma delle coordinate omologhe), di combinazione lineare (la successione della combinazione lineare delle coordinate omologhe).
Il prodotto scalare tra due successioni $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ è definito da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{b_i}$.
Per comodità ci restringiamo al corpo reale, e quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

Siamo sicuri che questo prodotto scalare è ben definito?
Sì; infatti la serie che lo definisce è a quadrato convergente. La norma risulta quindi:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

(finché ci interessiamo di coordinate reali, il modulo è inutile).
Questo spazio è l'immediata generalizzazione degli spazi a dimensione finita (si noti che tutti gli spazi di dimensione n sono isomorfi a $\mathbb{R}^n$)

Spazio *prehilbertiano*: *prodotto scalare* $p : V \times V \to \mathbb{K}$, simmetria (con il coniugio), vengono fuori i coefficienti, distributività rispetto alla somma, realtà e positività di $\langle x, x \rangle$. (1.1.7)
Poiché ci occuperemo quasi soltanto di spazi vettoriali sul corpo dei reali, e dato che un numero reale coincide con il proprio complesso coniugato, la prima delle relazioni (1.1.2), pag. 4, si esprime

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Poiché tratteremo quasi sempre con numeri reali la formula (1.1.3) diventa

$$\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$$

senza chiamare in causa $\overline{\alpha}$, complesso coniugato di α.

Richiamiamo rapidamente la definizione di **numero complesso** e la struttura che ne fa uno spazio vettoriale:
un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali (a, b) che viene scritta $a + ib$; a si dice "parte reale", ib si dice "parte immaginaria", e b si dice "coefficiente dell'immaginario". Si dice "modulo" di un numero complesso il numero reale non negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$. La somma tra numeri complessi si ottiene formalmente sommando separatamente le parti reali e le parti immaginarie, mettendo in evidenza la i, come nell'algebra usuale. Si dice "complesso coniugato" di $a+ib$ il numero $a-ib$, per cui la somma di due numeri complessi coniugati tra loro è $2a$. Il prodotto tra numeri complessi si definisce formalmente come nell'algebra usuale, salvo il fatto che si pone $i \cdot i = -1$; pertanto il prodotto tra due numeri complessi coniugati è $a^2 + b^2$, cioè il quadrato del modulo (due numeri complessi coniugati hanno ovviamente lo stesso modulo).

Richiamo sugli ordini di infinito (cardinalità o potenza di un insieme). Potenza del numerabile (è quella dei numeri naturali, interi, razionali) e potenza del continuo (quella dei numeri reali).

Si dice *separabile* uno spazio metrico V che ha un sottoinsieme V' denso in V e numerabile (è necessario che sia metrico, altrimenti non ha senso la funzione distanza e quindi il concetto di densità).

Spazio *hilbertiano*: prehilbertiano, completo, separabile e di dimensione infinita.

ℓ^2 è uno spazio hilbertiano; la prehilbertianità, la dimensione infinita e la separabilità sono facili a verificarsi; la dim. della completezza viene omessa.

Richiamo sulla dipendenza lineare (ha senso soltanto negli spazi vettoriali):
In uno spazio vettoriale n vettori si dicono *linearmente indipendenti* se l'unica loro combinazione lineare finita che dà per risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli.

martedì 6.10.2009

Definizione di ortogonalità (ha senso soltanto negli spazi prehilbertiani): due vettori in uno spazio vettoriale prehilbertiano si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è il numero 0.
(Ovviamente il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori.)
Per estensione: due *sottospazi* E ed F di uno spazio vettoriale si dicono *ortogonali* se ogni vettore di E è ortogonale ad ogni vettore di F (e ovviamente viceversa).

I vettori $(1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0 \dots), \dots, (0, 0, \dots 0, 1, 0 \dots), \dots$ sono ortogonali tra loro: infatti il prodotto scalare è una somma di prodotti tutti nulli. La norma di ciascuno di questi vettori è 1, per cui si dicono "ortonormali".

Isomorfismo tra spazi vettoriali, tra spazi normati e tra spazi di Hilbert (1.1.27).

Gli spazi funzionali (§1.5)
Le norme in $C^0([a, b])$, $L^1([a, b])$, $L^2([a, b])$. Esempi ed esercizi da 1.5.8 a 1.5.13 (saltando 1.5.11). Esercizi proposti del Cap. 1 (saltando i n.^{i} 2, 3, 4, 7, da 10 a 14, 16; per le soluzioni vd. Appendice A).
La stessa funzione può avere una norma diversa a seconda dello spazio in cui si considera.

Teorema di Fischer-Riesz (senza dim.; teor. 1.5.15 solo nel caso $p = 2$), dove il prodotto scalare è definito così:

$$\prec f, g \succ = \int_E f\overline{g}\, dx$$

e la norma quindi risulta

$$||f||_{L(E)} = \left(\int_E |f|^2 \; dx \right)^{1/2}$$

Il teorema asserisce che L^2 è uno spazio di Hilbert, e ne dà alcune proprietà: data una successione che converge secondo Cauchy, se ne può estrarre una che converge in senso ordinario ad una funzione $f \in L^2$; inoltre f_n converge ad f nella norma di L^2.
Si può verificare che $L^2([a, b]$ ed ℓ^2 sono isomorfi come spazi di Hilbert.

Nello spazio L^2 per poter rispettare il fatto che il prodotto scalare $\langle f, f \rangle$ sia nullo solo quando la funzione è quella sempre nulla, si considerano equivalenti alla funzione ovunque nulla anche tutte le funzioni che hanno un valore diverso da 0 solo su un insieme numerabile di punti.

Norme diverse nei diversi spazi funzionali: in $C^0([a, b])$ c'è la norma del sup (dato che sono funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, tanto vale dire "max"), in L^2 c'è la norma dell'integrale

$$||f||_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \; dx \right)^{1/2}$$

che proviene dal prodotto scalare seguente:

$$\prec f, g \succ = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} \; dx$$

in $L^1([a, b])$ c'è la norma dell'integrale

$$||f||_{L^([a,b])} = \int_a^b |f(x)| \; dx$$

che *non* proviene da nessun prodotto scalare.

La distanza tra due funzioni continue su un intervallo è diversa a seconda della norma; se si fissa la distanza ϵ, nella norma del sup le due funzioni non possono in nessun punto discostarsi per più di ϵ, mentre nella norma di L o di L^2 possono essere fortemente diverse in singoli punti, ma devono essere vicini gli integrali dei moduli (cioè deve essere minore di ϵ l'integrale del modulo della differenza tra le due funzioni).

giovedì 8.10.2009

Disuguaglianza di Schwarz (ha senso soltanto negli spazi prehilbertiani):

$$|\prec x, y \succ|^2 \leq \prec x, x \succ \cdot \prec y, y \succ$$

e vale il segno di uguaglianza se i due vettori sono linearmente dipendenti.□

Tramite la disuguaglianza di Schwarz si dimostra che la funzione

$$N(x) = \sqrt{|\prec x, x \succ|^2}$$

gode delle proprietà della norma e pertanto la disuguaglianza di Schwarz si può scrivere

$$|\prec x, y \succ| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Dato che in uno spazio prehilbertiano un prodotto scalare induce una norma, e questa induce una metrica, chiameremo quest'ultima "metrica (naturale) dello spazio". Come abbiamo visto, uno spazio può avere più di una norma e quindi più di una metrica.

La densità gode della proprietà transitiva. (Es. 1.1.21)
Uno sottospazio M' di uno spazio metrico M che sia un sottoinsieme proprio di M e denso in M non può essere completo. (Es. 1.1.22)

Definizione di convergenza *quasi ovunque*, di funzione quasi ovunque nulla.

Dimensioni, basi ed approssimazioni (§1.9)

0.0.1 Definizione. In uno spazio metrico V a dimensione infinita un sistema di vettori $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ si dice *base* se per ogni vettore $v \in V$, $\forall\epsilon > 0$ si può trovare un numero finito $n(\epsilon)$ di coefficienti c_i tale che:

$$||x - \sum_{i=1}^{n(\epsilon)} c_i u_i|| < \epsilon.$$

□

0.0.2 Teorema. *(della migliore approssimazione in norma) (1.9.10) Dato uno spazio (pre)hilbertiano ed in esso una famiglia di vettori ortonormali $\{u_k\}$, i coefficienti $\{c_k\}$ che rendono minima la norma*

$$||x - \sum_{k=1}^{n} c_k \ u_k||$$

sono dati da

$$a_k = \langle x, u_k \rangle.$$

(La dim. viene accennata in classe per cultura, per vedere un esempio dell'uso dell'ortonormalità.)

Alcuni esempi di spazi funzionali (= costituiti da funzioni):
$C^0([a,b])$, $C^1([a,b]), L^1([a,b]), L^2([a,b])$. Verifica di alcune funzioni che sono contenute in uno spazio e non nell'altro.
Ovviamente, è $C^1 \subset C^0$ e, se [a, b] è un intervallo chiuso e limitato, C^0 è palesemente sottoinsieme sia di L^1 che di L^2. Su quale spazio è contenente e quale è contenuto tra L^1 ed L^2 la cosa varia a seconda di come è fatto l'intervallo $[a,b]$. Ad es. se poniamo $[a,b] = [0,1]$ abbiamo che $1/x$ non appartiene a né ad L^1 né ad L^2. Però $1/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$, mentre è $1/\sqrt{x} \notin L^2([0,1])$. Invece $1/\sqrt[4]{x}$ appartiene sia all'uno che all'altro. Pertanto se l'intervallo è $[0,1]$ è $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, mentre sarebbe il viceversa se l'intervallo fosse una semiretta del tipo $[1,+\infty)$ (*non abbiamo dimostrato* queste inclusioni, abbiamo solo verificato che esiste un vettore che sta nell'uno e non nell'altro).

Teoremi di densità: $C^1([a,b])$ è denso in $C^0([a,b])$, che è denso in $L^2([a,b])$ che è denso in $L^1([a,b])$. (teorr. 1.6.4, 1.6.5, 1.6.6)

Norme diverse su $C^0([a,b])$.
Relazioni tra la norma e la convergenza.
Esercizi 1.5.24, 1.5.28 (tipi di convergenza); 1.5.30.

Definizione di *funzione caratteristica* di un insieme: è una funzione che vale 1 sull'insieme e 0 altrove. (1.4.13)

Definizione di *funzione a scala*:
È una combinazione lineare di funzioni caratteristiche su rettangoli.
Per il nostro caso, in cui consideriamo solo funzioni di una variabile reale, definite in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ è la *combinazione lineare di funzioni caratteristiche su intervalli.* (1.4.14, 1.4.15)

****

Non fanno parte del programma d'esame: dim. di 1.1.11; dim. di 1.1.12; dim. della completezza di ℓ^2 (p.9); 1.1.32; 1.1.35; 1.1.39; da 1.2 a 1.8; esercizi proposti 1, 3, 7, 10, 16 di p. 46.