CM95sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2009-2010
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

26.10.2009 - lunedì (2 ore)

Ripresa di quanto già registrato nella settimana precedente.
Studio delle funzioni $\frac{1}{z}$ e $\frac{1}{\bar{z}}$
Sua rappresentazione (inversione per raggi vettori reciproci: 3.1.10; si rende reale il denominatore). La circonferenza unitaria è unita, ma i punti con ascissa positiva si scambiano con quelli di ascissa negativa. Le circonferenze con raggio maggiore e minore di 1 si scambiano.

Calcolo di $e^{-i\pi} = -1$; ricordo che è $e^{2i\pi} = e^0 = 1$.

Definizione delle funzioni trigonometriche e delle funzioni iperboliche.
Legami tra queste e l'esponenziale complessa (formule di Eulero) (2.3.7; 2.3.9).

Verifica che quando z è reale, il seno è quello già noto (2.3.8).

Gli zeri della funzione seno nel campo complesso sono soltanto quelli del seno nel campo reale.
(Si sfrutta la periodicità complessa della funzione esponenziale, per cui viene $iz = -iz + 2K\pi i, \quad K \in \mathbb{Z}$; 2.3.11)

Risulta ancora $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

Altre formule del tipo $\sin iz = i \sinh z$, $\cos iz = \cosh z$ (2.3.12)

Accenno alle funzioni plurivoche: la radice quadrata $\sqrt{z}$ ha due valori, che sono opposti tra loro, mentre tra i reali il simbolo $\sqrt{x}$ indica una sola radice, quella positiva.
Validità della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado anche nel campo complesso (2.4.11).

Definizione di logaritmo:

$$\lg z = \ln |z| + i(\arg z + 2K\pi) \quad K \in \mathbb{Z}$$

La funzione è plurivoca. Determinazione principale: quella per $K = 0$.
Logaritmo di numeri reali negativi; logaritmo di numeri complessi con lo stesso modulo.
(§ 2 fino a 2.4.2)

Definizione di funzione potenza:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\lg z} = e^{\alpha[\ln|z|+i(\arg z+2K\pi)]} \quad K \in \mathbb{Z}$$

Calcolo di 2^2 e verifica che la funzione questa volta dà un valore solo (che è 4) (vd. analogamente 2.4.4).

27.10.2009 - martedì (2 ore)

Verifica che la funzione potenza ha un solo valore se l'esponente è intero, ha un numero finito di valori se l'esponente è razionale (2.4.5).

Il seno è una funzione illimitata è il suo codominio è l'intero piano complesso (2.4.13)
Stessa cosa per il coseno.

Funzioni di una variabile complessa

Definizione di derivata complessa e sua relazione con le derivate parziali delle funzioni di due variabili.

Regole di derivazione: uguali a quelle per le funzioni di una variabile reale; vale la regola di L'Hôpital; derivate di z^2, dell'esponenziale, del seno, del coseno (2.6.2-2.6.4; 2.6.7).
Limiti tramite il principio di sostituzione degli infiniti e degli infinitesimi.

Derivata del logaritmo plurivoco, che è $\frac{1}{z}$ (funzione univoca).

Esercizi da fare: 2.6.9; 2.6.10.

Definizione di funzione olomorfa (monodroma!) e primi esempi (2.7.1-2.7.2). Questa definizione, rispetto a quella più antica che pretendeva la continuità della derivata, tiene conto del lemma di Goursat.

Condizioni di Cauchy-Riemann in un punto: loro necessità (2.7.6, senza dim.)
La condizione non è sufficiente, ad esempio $f(z) = \sqrt{|xy|}$ soddisfa chiaramente le condizioni di C.-R., nell'origine, ma non è ivi derivabile (il limite su semirette diverse viene diverso). Negli altri punti fuori degli assi è derivabile.

Le condizioni di C.-R. (che sono condizioni in un punto) diventano anche sufficienti se la funzione è definita in una regione Ω e le derivate parziali $\partial u/\partial x = u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ esistono e sono anche continue in Ω. (2.7.9, senza dim.)

Esempi ed esercizi:

Una funzione olomorfa non costante che ha soltanto valori reali non può essere olomorfa: infatti le v_x e v_y sono nulle e quindi tali devono essere anche le u_x e u_y (2.7.11).

29.10.2009 - giovedì (2 ore)

Punti in cui la funzione non è derivabile mentre è derivabile in un loro intorno privo del punto si dicono *punti singolari isolati*: ad es. $z = 0$ in $1/z$.

Una funzione olomorfa che ha modulo costante è costante essa stessa. Infatti si deriva parzialmente l'espressione $u^2(x, y)+v^2(x, y) = k^2$ sia rispetto ad x che rispetto ad y, (risulta $2u\partial u/\partial x$ ecc.) e si fa sistema (i secondi membri vengono nulli); poi si applicano le condizioni di Cauchy-Riemann e si risolve con la regola di Cramer: commenti sul determinante (2.7.12).

Definizione di funzione *armonica*: soddisfa l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

Le funzioni olomorfe hanno le componenti che sono funzioni armoniche (laplaciano nullo) (2.7.13).

Ricordare cosa sono gli integrali curvilinei di funzioni di due variabili reali.

Armoniche coniugate: si fissa una funzione armonica $u(x, y)$ e si cercano quelle $v(x, y)$ (ovviamente armoniche anch'esse) che rendono $u+iv$ olomorfa. Si ottengono integrando da (x_0, y_0) a (x, y) la forma differenziale $v_x dx+v_y dy$. (2.7.16, in particolare formula (2.7.12)).
Ovviamente, trovatane una, tutte quelle che differiscono per una costante (reale o complessa) sono del pari coniugate.

Accenno alla trasformazione conforme (3.1.1).
Differenza tra trasformazione conforme e trasformazione isogonica. (3.1.3)

0.0.1 Teorema. *Se due curve γ_1 e γ_2 si intersecano in z_0 con un angolo α, le loro immagini tramite una funzione olomorfa h si intersecano in $h(z_0)$ e se $h'(z_0) \neq 0$ si intersecono con lo stesso angolo.(3.1.1, senza dim.)*

0.0.2 Teorema. *Una funzione olomorfa f induce una trasformazione conforme nell'intorno di ogni punto z_0 in cui è $f'(z_0) \neq 0$.(3.1.4)*

(è un altro modo di esprimere il teor. precedente)

Ricordare le considerazioni sulle intersezioni delle immagini delle rette parallele agli assi, in particolar modo z^2 (nell'origine le immagini degli assi si incontravano ad angolo piatto).
Ricordare $1/z$.
Invece $1/\overline{z}$ induceva una trasformazione isogonica, ma non conforme.
Ricordare e^z.

Punto all'infinito e proiezione stereografica della sfera.
Compattificazione tramite un punto solo.

Richiamo sulle curve, sugli integrali curvilinei, sulle forme differenziali e loro integrali (4.1.1-4.1.3).

Definizione di integrale di una funzione complessa su una curva regolare (4.2.1), sull'unione di curve regolari consecutive (additività: 4.2.2); l'integrale su un contorno si dice *circuitazione* (4.2.3).

Simbologia: $|dz| = |d(x+iy)| = \sqrt{dx^2+dy^2} = ds$.
Maggiorazioni tra i moduli (4.2.3).

Formula di Darboux: se una funzione è continua lungo una curva regolare L di lunghezza ℓ, e su questa curva è $|f(z)| \leq M$, allora vale

$$|\int_L f(z)\ dz| \leq M\ell.$$

Lemma precedenti il teor. di Cauchy (4.3.1).
Le circuitazioni $\oint dz$ e $\oint z\ dz$ sono nulle.

Teor. di Cauchy (4.3.2).

****
Non fanno parte del programma d'esame: la seconda parte della oss. 2.3.4; 2.3.14; 2.7.3; dim. di 2.7.6; 2.7.7; 2.7.8; dim. di 2.7.9; 2.7.10; 2.7.18; 2.7.20; da 2.7.22 a 2.7.25; dim. di 3.1.1; 3.1.7; 3.1.11; 3.1.14; 3.1.15; § 3.2; tra gli es. proposti: 6; dim. di 4.2.5; dim. 4.3.2.; 4.3.4;