CM97sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2009-2010
Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

9.11.2009 - lunedì (2 ore)

Ripresa dei due teoremi sulla integrazione per serie (la successione $\{f_n\}$ deve essere uniformemente convergente) e sulla derivazione per serie (la successione $\{f'_n\}$ deve essere uniformemente convergente) (5.1.3, 5.1.4)

Teorema analogo (ma con ipotesi leggermente diverse) per le serie di funzioni continue di variabile complessa definite su una regione E: la serie $\sum_0^\infty f_n(z)$ sia uniformemente convergente in ogni compatto $K \subset E$. Allora: la somma $F(z)$ è una funzione continua (prevedibile, data l'uniforme convergenza);
se Γ è una curva generalmente regolare, la serie degli integrali su Γ delle $\{f_n\}$ è una serie numerica convergente ed è uguale all'integrale della $F(z)$;
se inoltre le funzioni $\{f_n\}$ sono olomorfe nella regione E allore la somma $F(z)$ è olomorfa, e per ogni ordine p di derivazione la serie delle derivate $\sum_0^\infty f_n^{(p)}$ è convergente, e converge proprio alla derivata $F^{(p)}(z)$ della serie, e tale convergenza è uniforme su ogni K compatto contenuto in E.
(5.1.5, senza dim.)

Pertanto una serie di funzioni olomorfe uniformemente convergente può essere derivata termine a termine (cosa non vera per le funzioni di variabile reale, in cui ci voleva la convergenza uniforme della serie delle derivate), e questo risulta vero per le derivate di tutti gli ordini. Resta valido per la variabile complessa il teorema riguardante gli integrali (si ricordi che data una funnzione continua, le sue primitive sono più regolari della funzione stessa, mentre la sua derivata lo è meno) (5.1.6).

Le serie di potenze di punto iniziale z_0 convergono in un cerchio C di centro z_0 e convergono uniformemente in ogni compatto contenuto in C. Cerchio di convergenza, raggio di convergenza R (eventualmente infinito).

Criterio del rapporto: se per una serie di potenze di coefficienti a_n è $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, allora $\ell = \frac{1}{R}$

Ripresa della serie geometrica di ragione z e del suo insieme di convergenza (e di convergenza assoluta) anche nel campo complesso. (5.1.1; attenzione nell'ultima formula di p. 111 è per errore scritto z^k invece che z^{k+1}.)

0.0.1 Teorema. *(di Cauchy-Taylor): Se $f(z)$ è olomorfa in un intorno di* *a, allora nel più grande cerchio aperto contenuto in tale intorno la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

risulta convergente e in tale cerchio risulta:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Inoltre tale serie risulta uniformemente convergente in ogni compatto contenuto nel cerchio di convergenza.

Dim. - Si scrive la formula di Cauchy per la $f(z)$, dove al denominatore dell'integranda compare $t-z$ e l'integrale è fatto in dt (t è la variabile che corre su C):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z}\, dz$$

Poi ci si occupa dell'integranda e il denominatore, che è $t-z$ lo si scrive $t-a+a-z$; poi si mette in evidenza $t-a$ e resta la frazione

$$\frac{f(t)}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}}$$

Il secondo fattore si può scrivere sotto forma di serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n$ di ragione $\frac{z-a}{t-a}$ che ha modulo < 1 e che quindi risulta uniformemente convergente e quindi si può integrare per serie, cioè scrivere al poste dell'integrale della serie, la serie degli integrali.
Ovviamente questo vale purché ci si trovi all'interno di un contorno (qualsiasi) di centro a.
Tornando alla formula di Cauchy e integrando termine a termine si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n dt = \text{ (integrando per serie) } =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt\right](z-a)^n,$$

cioè l'asserto, perché quegli integrali sono proprio le derivate divise per il fattoriale corrispondente.

La serie si dice *serie di Cauchy-Taylor* della (z) e la sua estpressione si dice *sviluppo di Cauchy-Taylor* delle f.

Sviluppo della serie geometrica in un punto diverso da 0:
si prende $1/(1-z)$ e si aggiunge e toglie a; si ottiene una serie geometrica di ragione $\frac{z-a}{1-a}$ (5.2.8).

Sviluppo di $f(z) = \frac{1}{z}$ in un intorno del punto $z = a$ (dove è olomorfa, mentre in $z = 0$ non lo è).
Al denominatore aggiungo e tolgo a, e poi metto in evidenza a, e il denominatore resta $1 + \frac{z-a}{a}$ che quindi dà la serie geometrica di ragione $-\frac{z-a}{a}$, che converge per $|z-a| < |a|$.
Evidentemente questo è lo sviluppo della funzione z in un intorno del punto a (non la si confonda con lo sviluppo della funzione $1/(z-a)$!).

Esistono funzioni reali che sono $C^\infty(\mathbb{R})$, ma non si possono sviluppare in serie di Taylor:

$$f(x) = e^{-1/x^2} \qquad x \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

Altro esempio in 5.3.10.

10.11.2009 - martedì (2 ore)

0.0.2 Teorema. *Se una serie di potenze di centro a converge ad una funzione olomorfa f, allora i suoi coefficienti sono $a_n = f^{(n)}(a)/n!$*

Infatti deriviamo termine a termine (si può, data la convergenza uniforme) e in $z = a$ resta un solo termine (gli altri o sono andati a 0 derivando o valgono 0 in $z = a$ (5.2.4).

Sviluppi in serie di Cauchy-Taylor (unici) delle funzioni trigonometriche (5.2.7).

Sviluppo di e^z, di e^{-z^2}

Sviluppare $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$; lo sviluppo converge nel cerchio di raggio 1, così si capisce anche perchè lo sviluppo di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ convergeva soltanto nell'intervallo $[0, 1]$ (5.2.13).

Definizione di *funzione analitica* (5.2.3).
Le funzioni olomorfe in una regione Ω sono analitiche, quindi $C^\omega(\Omega) = H(\Omega)$.
Lo sviluppo di Cauchy-Taylor è unico (con dim., 5.2.4).

Principio di identità delle serie di potenze (5.2.5, 5.2.6)

Sviluppi di funzioni note (5.2.7-5.2.13), con ripresa della serie geometrica e della funzione $1/z$.

Sviluppo di $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \ldots$

Principio di identità per le funzioni analitiche: se sono uguali su una sottoregione sono uguali sull'intera regione.
(niente dim.)

Richiamo e analogia (fino a un certo punto) con il principio di identità dei polinomi (oss. 5.3.2).

Definizione di ordine di uno zero per una funzione analitica: di ordine k se sono nulli i suoi coefficienti fino a quello di posto $k-1$, mentre $a_k \neq 0$. (5.3.2-5.3.4; attenzione: nella def. 5.3.3 è scritto per errore "i primi $k-1$ coefficienti", mentre c'è anche a_0, e quindi poi sono giustamente indicati i primi k).

0.0.3 TEOREMA. *(degli zeri) Gli zeri di una funzione analitica non identicamente nulla sono isolati.*

Dim.- È $f(z) = (z-a)^k g(z)$, dove $g(z)$ è il resto della serie, che comincia con il coefficiente $a_k \neq 0$. Allora $(z-a)^k$ si annulla solo in a, mentre $g(z)$ *non si annulla* in un intorno abbastanza piccolo di a.

A lezione non è stato specificamente insistito che, ovviamente è esclusa la funzione identicamente nulla, la quale è olomorfa e per la quale quindi tutti i punti della regione di definizione sono degli zeri, che pertanto non sono isolati.

Principio forte di identità: se due funzioni analitiche coincidono su due insiemi che hanno un punto di accumulazione in Ω coincidono su tutto Ω (con dim., 5.3.8).

Funzioni reali che non possono essere restrizioni di funzioni analitiche (già visto precedentemente: 5.3.10).

12.11.2009 - giovedí (2 ore)

Prolungamento analitico.
Attenzione: non tutte le funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ sono prolungabili analiticamente su $\mathbb{C}$; vd. ad es. $x^2 \sin \frac{1}{x}$. (5.4.1-5.4.6).

Accenno a prolungamenti analitici che danno luogo ad una funzione polidroma (fig. 6.9, p. 127)

Dimostrare che le tre funzioni

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} z^k, \qquad f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-z}\right)^k, \qquad f_3(z) = \frac{z}{1-2z}$$

sono i prolungamenti della stessa funzione ad insiemi diversi (5.4.12).

Formula di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse (cenno; attenzione: nella formula 4.4.12 il denominatore dell'integranda è scritto per errore $z - a$ mentre deve essere $(z-a)^{n+1}$).

Teor. di Cauchy-Laurent (solo accenno della dim.)
I coefficienti sono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt; \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{-n+1}}\, dt$$

Unicità dello sviluppo di Cauchy-Laurent (5.6.4, senza dim.)

I coefficienti sono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt; \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{-n+1}}\, dt$$

Unicità dello sviluppo di Cauchy-Laurent (5.6.4, senza dim.)

Serie bilatera (5.6.2).

Residuo (è il coefficiente b_1) e *parte principale* (è la parte con le potenze negative)

Sviluppi elementari (5.6.7; 5.6.8; 5.6.10).

$$f(z) = \frac{1}{3z^2 + z} = \dots$$

(si mette in evidenza z al denominatore e poi si ha una serie geometrica; vd. 5.6.11)

Esercizi proposti (pp. 152-153, salvo i n[i] 6 e 8).

****

Non fanno parte del programma d'esame: dim. di 5.1.5; 5.2.12; 5.2.14; 5.2.15; 5.2.16; dim. di 5.3.1; 5.3.7; 5.3.13; da 5.4.7 a 5.4.11; da 5.4.14 a 5.4.21; da 5.4.23 a 5.5.2; dim. di 5.6.1; 5.6.4; 5.6.9; 5.6.11; 5.6.12; 5.6.13; es. 6 ed es. 8 di p. 153.