COMPLEMENTI DI MATEMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

CM98sett.tex
16.11.2009 - lunedì (2 ore)

Esercitazione del 16.11.2009
Risolvere tre esercizi per pagina, a scelta.

1. Si definisca la funzione *logaritmo* nel campo complesso; in che relazione è con essa il logaritmo naturale definito sui reali positivi?
2. Si esponga il problema della migliore approssimazione in norma, e si dica in quali spazi esso ha certamente soluzione, e quale è questa soluzione.
3. Trovare le immagini delle rette parallele agli assi tramite la funzione z^2.
4. Esporre un teorema che garantisca la convergenza uniforme di una serie di Fourier.
5. Il teor. di Cauchy per gli integrali di funzioni olomorfe su curve omologhe a zero si basa sull'annullarsi di due integrali più semplici. Si dica quali e si verifichi il loro annullarsi.
6. Si dica quando si dice che una funzione soddisfa la condizione del Dini in un punto. Dimostrare che le funzioni hölderiane in un punto soddisfano la condizione del Dini in quel punto.
7. Si dia la definizione di *isomorfismo tra spazi di Hilbert*.
8. Si definisca una *funzione armonica*. Un polinomio di primo grado nelle variabili x e y è sempre una funzione armonica?
9. Quali zeri ha la funzione $\sin z$? Verificarlo.
10. Si enunci il teorema fondamentale dell'algebra e lo si dimostri utilizzando il teor. di Liouville.
11. Sullo spazio $C^0([-\pi,\pi])$ abbiamo considerato tre norme: quella che gli è propria e quelle che sono indotte dagli spazi $L^2([-\pi,\pi])$ e $L([-\pi,\pi])$ che contengono $C^0([-\pi,\pi])$. Presentare singolarmente le tre norme, proponendo anche qualche esempio di successione che converge secondo una di queste ma non secondo le altre.
12. Il criterio di Riemann-Lebesgue vale per quali funzioni? La dimostrazione è fatta per certe funzioni particolari e poi estesa sfruttando una densità. Esporre la situazione.

13. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos nx;$$
converge puntualmente in $[-\pi, \pi]$? Converge uniformemente? È una serie di Fourier?
Se ne può effettuare la derivazione per serie?
Giustificare le risposte.

14. Si dia un esempio di funzione integrabile sull'intervallo $[-1, 1]$, ma *non* a quadrato integrabile su tale intervallo, e un esempio di una funzione a quadrato integrabile sulla semiretta $[1, +\infty)$, ma *non* integrabile su tale semiretta.

15. Si definisca cosa è uno spazio prehilbertiano e si dica cosa significa che due vettori sono ortogonali in tale spazio.

16. Si dia la definizione di olomorfia in una regione Ω per una funzione di variabile complessa.
La funzione $f(z) = |z|$ è olomorfa in qualche regione di $\mathbb{C}$? Perché?

17. a) Si dia la definizione di spazio metrico; uno spazio di Hilbert può essere dotato sempre di una metrica? Se sì, come?
b) Si dia la definizione di spazio metrico *completo*. Uno spazio di Hilbert è uno spazio metrico completo? Rispetto a quale norma?

18. a) La frase "lo spazio A è denso nello spazio B" ha senso in tutti gli spazi topologici? solo negli spazi metrici? solo negli spazi normati? Solo negli spazi di Hilbert? Dare la definizione di densità e illustrare la situazione.

19. a) Si illustri il concetto di dipendenza lineare, e si definisca un sistema di vettori completo (o *base*) in uno spazio vettoriale.
b) Quando un sistema di vettori si dice *ortogonale*? e quando *ortonormale*? Quali basi abbiamo visto in ℓ^2? e in $L^2([-\pi, \pi])$? Sono basi ortogonali? anche ortonormali?

20. a) Per una serie numerica la tendenza a 0 dei coefficienti non è condizione sufficiente per la convergenza della serie. Illustrare un caso.
b) Si definisca una serie trigonometrica; quindi si definisca una serie di Fourier. Che relazione c'è tra i due tipi di serie?

21. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx;$$
converge puntualmente in $[-\pi, \pi]$? Converge uniformemente? È una serie di Fourier? Se ne può effettuare la derivazione per serie? Giustificare le risposte.

22. a) L'insieme di convergenza di una serie di potenze nel campo complesso è un cerchio di centro a e raggio r. In quali sottoinsiemi di tale cerchio c'è anche convergenza uniforme?
b) Data una funzione olomorfa f definita in un intorno del punto a, quante serie di potenze di centro a convergono uniformemente ad f? Quali?
c) Una serie di potenze si può sempre derivare per serie? Perché?

23. a) Si esponga il teor. di Cauchy per le funzioni olomorfe, sia nel caso delle regioni semplicemente connesse che nel caso di regioni non semplicemente connesse.
b) Si dimostri intuitivamente il teor. di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse.
c) Scrivere la formula di Cauchy, in cui compare un integrale funzione di un punto a. Per quali valori di a essa vale? Che valore ha l'integrale a seconda di dove si trova a?
d) Si scriva la formula di Cauchy per le derivate successive. Quale sarebbe il punto cruciale nella dimostrazione?

24. a) C'è una relazione tra la hölderianità di un certo ordine e la derivabilità di una funzione. Illustrare la situazione.
b) Si illustri la relazione tra funzioni continue, lipschitziane e derivabili in un certo punto x_0.
d) Una funzione $C^2([a,b])$ è hölderiana di ordine 2 in tutti i punti di $]a,b[$? Perché?

25. a) Si definisca la serie geometrica di centro l'origine, e quindi se ne scriva la sua funzione somma tramite una serie di potenze di centro un altro punto a di olomorfia.
b) Si dia la definizione di olomorfia in una regione Ω per una funzione di variabile complessa. Le condizioni di Cauchy-Riemann sono necessarie per l'olomorfia in una regione? sono sufficienti?
c) Si definiscano le funzioni circolari e iperboliche nel campo complesso, e quindi si dimostri che l'immagine di $\sin z$ è tutto $\mathbb{C}$.
d) Si definisca la funzione a^z; quando ha un solo valore? quando ne ha un numero finito? quando ne ha un numero infinito? Quindi si calcolino i valori di i^{2i}.

26. Si dimostri che $f(x,y) = e^x \cos y$ è una funzione armonica.

27. Si dia la definizione di forma esatta e se ne espongano le principali caratteristiche.

28. a) Si definisca una trasformazione conforme; si verifichi che e^z induce una trasformazione conforme da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mantenendo gli angoli tra le immagini delle rette parallele agli assi.
b) Definire una curva regolare, il suo orientamento, una forma differenziale e l'integrale di una forma differenziale su una curva.

c) Enunciare il teor. di Cauchy per gli integrali delle funzioni di variabile complessa, e dimostrare l'annullarsi dei due integrali $\oint_C dz$ e $\oint_C z\, dz$ quando C è una curva omologa a zero.
d) Si dia la definizione di *prolungamento analitico*, utilizzando come esempio i vari sviluppi (in serie di potenze) di centri diversi della funzione $\frac{1}{1-z}$

29. Si scriva la serie generica di Cauchy-Laurent in una corona circolare con centro un punto di non olomorfia.

30. Si dia un esempio di prolungamento di una funzione olomorfa che conduce ad una funzione plurivoca, illustrando il procedimento.

31. Si enunci il teor. di Darboux e si indichi una situazione in cui è stato utilizzato.

32. Si enunci e si dimostri dimostri il teor. di Cauchy-Taylor.

33. In che regione vale lo sviluppo in serie di Cauchy-Taylor di centro 2 della funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$?

34. Una funzione olomorfa di modulo costante è costante. Dimostrarlo.

35. Quando una trasformazione di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ si dice *conforme*? Nell'intorno di quali punti una funzione olomorfa induce una trasformazione conforme?

36. Si definisca la proiezione stereografica della sfera

37. Quali sono le immagini delle rette parallele agli assi coordinati tramite la funzione $f(z) = e^z$?

38. Si dica quando un sottospazio A' si dice *denso* in uno spazio A. Dimostrare che l'essere denso è una proprietà transitiva.

39. Si enunci il teorema di Jordan.

40. Si dica cosa significa *derivare per serie* e si dia un esempio di una serie di Fourier per la quale è valida la derivazione per serie.

17.11.2009 - martedì (2 ore)

Esercitazione su spazi, topologici, metrici, normati, di Hilbert; densità, completezza, dimensioni, ortogonalità, normalità; convergenze secondo le varie norme.

Serie geometrica, prolungamenti analitici, serie di potenze, serie di Taylor, serie di Cauchy-Laurent.

19.11.2009 - giovedì (2 ore)

Esercitazione avente valore di prova parziale.