COMPLEMENTI DI MATEMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrotecnica

23.11.2009 - lunedì (2 ore)

Visione e correzione della prova parziale.

Punti singolari isolati: singolarità eliminabili, polari, essenziali e loro caratteristiche geometriche (da 6.1. a 6.1.18, senza le dimostrazioni).

24.11.2009 - martedì (2 ore)

Considerazioni sulla limitatezza di una funzione in un intorno di un punto singolare; diversità rispetto alle funzioni di variabile reale come $\sin \frac{1}{x}$ che non è prolungabile per continuità e anche $x \sin \frac{1}{x}$, che è prolungabile per continuità, ma non in una funzione derivabile.

Ripresa del limite infinito quando c'è un polo di ordine k (dim. fuori programma, fatta per cultura: si raccoglie $(z-a)^{-k}$ e quello che resta è una funzione olomorfa).

0.0.1 Teorema. *Se il limite per $z \to a$ è infinito, allora in a si ha un polo. (senza dim.)*

Verifica degli zeri e del loro ordine; dove c'è uno zero di ordine diverso nello stesso punto per la funzione esso è uno zero se l'ordine dello zero è superiore nel numeratore, è un polo se è superiore l'ordine al denominatore (se l'ordine è uguale la singolarità è eliminabile.

Rovesciamento di una serie (es. 6.1.14, 6.1.15, 6.1.16, 6.1.17, 6.1.18).

$$f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}$$

Ordine del polo (secondo); si mette in evidenza z^2 e poi bisogna trovare una funzione olomorfa che sia l'inversa del fattore che resta (che è una funzione olomorfa), e quindi si fa il prodotto e si impone che venga 1.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z - z}$$

Idem; il polo è del terzo ordine.

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

Cercare dove sono le singolarità e di che tipo. Il denominatore si annulla del secondo ordine per $z = 0$ e del primo per $z = 2K\pi i$. Se si vuole la serie di C.-L. in $z = 0$ bisogna rovesciare la serie $1 + z/2! + z^2/3! \dots$

0.0.2 TEOREMA. *(di Picard) - Data una f olomorfa, in un intorno di ogni singolarità essenziale la f assume tutti i valori complessi salvo al più uno, e li assume infinite volte.*

26.11.2009 - giovedì (2 ore)

Verifica che il valore 0 *non* è assunto dalla funzione $ze^{1/z}$

Regola pratica per il calcolo del residuo in un polo (del primo ordine) (p. 168).

Basta scrivere

$$f(z) = b_1(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 \dots$$

e quindi moltiplicare per $(z-a)$ e fare il limite.
Se il polo è di ordine m basta moltiplicare per $(z-a)^m$ e derivare $m-1$ volte e dividere per $(m-1)!$

0.0.3 ESERCIZIO. Calcolare la natura delle singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{e^{2iz}-1}$$

Il denominatore si annulla in $2iz = \lg 1 = i(0 + 2K\pi)$ e quindi per $z = K\pi$; il numeratore si annulla (del secondo ordine) in $z = 2K\pi$. Consideriamo i limiti per $z \to K\pi$ quando K è pari e quando K è dispari. Quando K è pari si annullano sia numeratore che denominatore (il numeratore del secondo ordine e il denominatore del primo, quindi il limite viene 0). Negli altri punti si annulla solo il denominatore, e il limite viene infinito (polo del I ordine).
Se non si vede subito il valore del limite, si applica L'Hôpital. □

0.0.4 ESERCIZIO. Si trovi la somma della serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-z}\right)^n$$

l'insieme dove è definita e il massimo prolungamento analitico della sua somma.
Deve essere $|z| < |z-1|$, cioè $x < 1/2$ e la somma è $\frac{1-z}{1-2z}$ che prolunga la serie all'intero piano $\mathbb{C}$ salvo $z = 1/2$. □

Esercizi da 1 a 10.

0.0.5 Teorema. *(dei residui) Sia f olomorfa in una regione salvo un numero finito di punti singolari z_k e sia γ un contorno che li circonda.*
Detti r_k =Res(z_k) $(k = 1, 2, 3, \ldots, N)$ i residui di f nei punti z_k si ha

$$\oint_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_1^N r_k$$

Dimostrazione. È il teor. di Cauchy-Laurent applicato ad ogni punto z_k, dove lo sviluppo in un intorno di ogni punto porta $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_k)^{-n+1}}\ dt$, e quindi per $n = 1$ si ha la tesi. (7.1) □

Attenzione: il teor. dei residui vale solo se il numero di singolarità all'interno di γ è finito, perché altrimenti ci sarebbe un punto di accumulazione che sarebbe ancora una sigolarità, che però non sarebbe più isolata e non varrebbe più il teor. di C.-L..

0.0.6 Esercizio. Calcolare lo sviluppo in serie di Cauchy-Laurent della funzione:

$$f(z) = \frac{z \cos z}{1 - \cos z}.$$

in un intorno di 0.

Verrà chiaramente un polo del I ordine. Uno z si semplifica, e sotto resta uno sviluppo con z in evidenza e il resto è uno sviluppo di Taylor. Basta rovesciare la serie al denominatore. □

0.0.7 Esercizio. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z-2}\ dz$$

dove γ è il cerchio di centro l'origine e raggio 4.

Chiaramente il punto $z = 2$ è dentro al cerchio. Per lo sviluppo di C.-L. in un intorno del punto 2 basta scrivere $e^z = e^{z-2}e^2$. Il residuo è $e^2 \cdot 1$, e quindi l'integrale vale $2\pi i e^2$.

Se il cerchio avesse avuto raggio 1 l'integrale era nullo; se avesse avuto raggio 2 l'integrale non esisteva perché la f non era continua in $z = 2$. □

0.0.8 Esercizio. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{e^{izt}}{t^2+1}\ dt$$

dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio 3/2. (Attenzione: z è un numero fisso, la variabile complessa è t.)

I punti di singolarità sono in $z = \pm i$, che cadono entrambi nel cerchio. Basta quindi calcolare i due residui in questi due punti, che sono poli semplici. Il primo è dato da

$$\mathrm{Res}(i) = \lim_{t\to i} \frac{(t-i)e^{izt}}{t^2+1} = \frac{e^{-z}}{2i}$$

e l'altro viene lo stesso, ma col segno cambiato. □

****

Non fanno parte del programma d’esame:; tutte le dim da 6.1. a 6.1.18; da 6.1.19 a 6.1.23; 6.1.26; da 6.1.30 alle fine del capitolo 6.