Terza settimana

16.10.2007

Definizione di limite con esempi per $x \to x_0$ (3.2, compresi gli esempi). (La proposizione 25 di p. 72 con il suo esempio verrà fatta successivamente.)

Limite destro e limite sinistro (def. 26 e prop. 27). Funzioni prive di limite.

Limite infinito (§ 3.4): studiare in particolare gli esempi grafici.

Limite finito all'infinito (esempi e grafici) (§ 3.5).

Limite infinito all'infinito (§ 3.6): ricordare alcuni grafici fondamentali (x^n ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$; per $x \to -\infty$ ha limite $+\infty$ se la potenza n è pari, ha limite $-\infty$ se la potenza n è dispari).
Ricordare i limiti del logaritmo, sia in base > 1 che in base < 1, ricordare i limiti delle esponenziali, sia in base > 1 che in base < 1.

Teorema sull'unicità del limite (con dim., p. 82).

18.10.2007

Regole di calcolo dei limiti e forme indeterminate (§§ 3.8 e 3.9). In particolare: funzioni razionali (= quozienti di polinomi) (3.9.1).

Definizione di infinitesimo (= una funzione che tende a 0, p. 73) e di infinito (= una funzione che tende all'infinito).
Un infinitesimo per una funzione limitata è un infinitesimo (prop. 25 di p. 72 con esempio)

Casi in cui i teoremi sul calcolo dei limiti non ci aiutano: ad es. $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ è il prodotto di due funzioni delle quali una ha limite ma l'altra no; il limite del prodotto comunque esiste, e vale 0 perché è il prodotto di un infinitesimo per una limitata.

Limite notevole: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (niente dimostrazione). La funzione è pari.
Applicazione: quale è $\lim_{x\to\pm\infty} x \sin \frac{1}{x}$?
Basta sostituire t ad $\frac{1}{x}$ e quel limite diventa $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.
(Ricordare che quando $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, e ovviamente anche questa nuova funzione è ancora pari.)

Teorema della permanenza del segno (attenzione: il limite deve essere diverso da 0 !!!).

Teorema del confronto (o dei carabinieri). Vale anche per i limiti $+\infty$ e $-\infty$.
Esempio: $f(x) = x + \sin x$ (funzione dispari, perché somma di funzioni dispari) è compresa tra $x + 1$ e $x - 1$: entrambe tendono all'infinito (col +

o col - a seconda se si va a $+\infty$ o a $-\infty$, e quindi anche la f, che è sempre compresa tra queste tende all'infinito (al solito, col + o col -).

Funzioni continue e teoremi sulle funzioni continue in un intervallo.

Teorema di Weierstrass (p. 100), con esempi in cui se cade un'ipotesi può cadere la tesi: 1/x non ha massimo né minimo sulla semiretta aperta dei reali strettamente positivi; se prendo la semiretta chiusa dei reali ≥ 1 ha massimo ma non minimo (la semiretta non è limitata).

Può invece essere verificata la tesi, senza che sia verificata l'ipotesi: ad esempio, il seno su tutta la retta ha massimo e minimo, anche se $\mathbb{R}$ non è limitato.

Esempio in cui una funzione discontinua su un intervallo (anche se è chiuso e limitato) non ha massimo, ed esempio in cui invece ce l'ha, pur essendo discontinua.

Programma svolto: fino a metà di p. 101.