MATEMATICA I

Corso intensivo per Lavoratori Studenti

Esercitazione per casa in vista del I compitino (8.11.2007) - Gli abbozzi di soluzioni sono in fondo (i numeri si riferiscono al libro di testo: G. Artico: Istitutzioni di Matematiche, Progetto, 2007).

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to 3} = +\infty$ e si scriva una funzione che gode di questa proprietà.

2. Si dia la definizione di continuità di una funzione nel punto x_0 (ovviamente appartenente al suo insieme di definizione!). È richiesta l'esistenza del limite *finito* per $x \to x_0$?

3. Una funzione continua in un punto x_0 è limitata in un intorno di tale punto? E una funzione che ha limite finito ℓ per $x \to \infty$?

4. La funzione $x + \sin x$ è limitata su $\mathbb{R}$? e sull'intervallo $[1, 2]$? e sull'intervallo aperto $]1, 2[$? È crescente nel suo insieme di definizione?

5. a) Il limite della somma è sempre uguale alla somma dei limiti?
b) Il limite del prodotto è sempre uguale al prodotto dei limiti?
c) Il prodotto di una funzione f che tende all'infinito per $x \to x_0$ (o all'infinito) per una f_1 limitata in un intorno di x_0 (o dell'infinito) è un infinito (cioè: una funzione che tende all'infinito)?

6. Quale infinitesimo di confronto si sceglie per valutare l'ordine di un infinitesimo per $x \to 2$? Se f è un infinitesimo per $x \to 2$, la funzione $f(x) \cdot e^{\sin(x-2)}$ è del pari un infinitesimo? E $f(x) \cdot e^{-\frac{1}{\sin|x-2|}}$?

7. a) Come si comportano le rette tangenti nel punto $(x_0, f(x_0))$ ai grafici di funzioni che sono infinitesime rispettivamente di ordine $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$ per $x \to x_0$?
b) Quale è la tangente al grafico della funzione $\frac{\cos x - 1}{x}$ prolungata per continuità nel punto $x = 0$?

8. Si studi la funzione $f(x) = |\tan x|$ (i.d.d., eventuale parità o disparità, periodicità, dove è continua, derivabile, dove si annulla, segno, immagine, eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti, eventuali asintoti.

9. Si enunci il teor. di Weierstrass e si faccia un esempio di funzione continua su un intervallo limitato che non ha né max né min.

10. a) Si scriva l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 2 al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - \lg(x - 1)$.
b) Si studino i limiti della funzione di cui al punto a) e della sua derivata per $x \to 1^+$ e per $x \to +\infty$. Si può desumere che ci siano punti di massimo o di minimo?

************************************ **Abbozzi di soluzioni**

1. Le definizioni di limite occupano le pagine 64-82 e vanno sapute tutte. Quella qui richiesta è la def. 28 a p. 70, oppure, se si vuole sfruttare la def. di *intorno* di p. 95, la def. 38. Una funzione che goda della proprietà richiesta può essere $f(x) = \frac{1}{|x-3|}$. Attenzione: se non si mette il modulo, la funzione non tende a $+\infty$, ma ha limiti infiniti di segno diverso a seconda se si tende da destra o da sinistra.

2. La def. di continuità è a p. 96. Evidentemente è richiesta l'esistenza del limite *finito*.

3. La def. di funzione *limitata* è a p. 61. Una funzione continua in x_0 è limitata in quanto per essere continua deve avere limite finito, e quindi in un certo intorno di x_0 è compresa tra $f(x_0) - \epsilon$ ed $f(x_0) + \epsilon$. Del pari una funzione che ha limite ℓ per $x \to \infty$. Si ricordi che "intorno" di $+\infty$ è una semiretta che contiene tutti i punti maggiori di un certo x_0 (semiretta crescente), un intorno di $-\infty$ è una semiretta opposta a quella (decrescente), un intorno di ∞ (senza segno) è l'unione di due tali semirette.

4. Non è limitata perché esiste un intorno di ∞ in cui il suo modulo è maggiore di un M scelto (grande) a piacere (è un infinito sommato ad u na limitata). Lo è invece sull'intervallo $[1, 2]$ perché è continua e l'intervallo è chiuso e limitato (teor. di Weierstrass, p. 100). È continua anche nell'intervallo aperto, in quanto sottoinsieme di quello chiuso (in generale una continua su un intervallo aperto non è necessariamente limitata, perché non è soddisfatta una delle ipotesi del teor. di Weierstrass; un controesempio è la $\tan x$ sull'intervallo $]-\pi/2, \ +\pi/2[$. È crescente, perché ha derivata sempre ≥ 0.

5. a) Il limite della somma è sempre uguale alla somma dei limiti, quando questi esistono e sono finiti (prop. 34, p. 85). Il viceversa non è vero (vd. p. 84, nota 7; ad es. $\sin x$ e $-\sin x$ hanno sempre somma nulla, ma ciascuna di esse non ha limite per $x \to \infty$).
   b) Il limite del prodotto è sempre uguale al prodotto dei limiti, quando questi esistono e sono finiti (p. 86). Il viceversa non è vero, basta prendere due funzioni che non hanno limite (e che non si annullano mai) e moltiplicare una per l'inverso dell'altra: il quoziente è la funzione sempre uguale a 1, che quindi ha limite 1 per x che tende a qualsiasi x_0 e anche all'infinito.
   c) Non è detto. Non basta che f_1 sia limitata, bisogna anche che si discosti dallo 0. Se avesse limite 0 potrebbe succedere di tutto (vd. le forme indeterminate di tipo $0{\cdot}\infty$, p. 89). Ad es. $f_1(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{|x|}$ per $x \to 0$.

6. L'infinitesimo standard che si sceglie per confronto è $x-2$. È $\lim_{x\to 2} f(x)\cdot e^{\sin(x-2)} = 0$,
perché si tratta di un infinitesimo per una limitata (infatti $e^{\sin(x-2)} \to e^0 = 1$ e quindi è limitata in un intorno di 2). Nell'ultimo prodotto il denominatore dell'esponente tende a 0 restando positivo, quindi l'intero esponente va a $-\infty$, e quindi l'esponenziale va a 0, addirittura di ordine superiore ad ogni funzione del tipo $\frac{1}{x^n}$; si tratta quindi di un prodotto di due infinitesimi, che tende quindi a 0.

7. Un infinitesimo di ordine 1 ha un grafico che in x_0 taglia obliquamente l'asse delle x, un infinitesimo di ordine 2 ha un grafico la cui tangente è orizzontale, un infinitesimo di ordine inferiore a 1 ha un grafico a tangente verticale.
b) Il limite per $x\to 0$ è 0 e quindi il prolungamento per continuità si ottiene ponendo in 0 il valore 0. Il numeratore è un inf.mo del 2^o ordine, il denominatore del 1^o. La tangente al grafico ha coeff. angolare 0 e quindi, passando per l'origine, è proprio l'asse delle x.

8. È pari, periodica di periodo π, non è limitata (lo è solo inferiormente). L'ins. di def. sono gli intervalli aperti del tipo $]-\pi/2+K\pi, \pi/2+K\pi[$. L'immagine è l'insieme dei reali non negativi; continua dappertutto (dove c'è), derivabile dappertutto salvo i punti del tip $K\pi$, dove le tangenti sono da destra parallele alla retta $y=x$ e da sinistra parallele alla $y=-x$. Questi sono tutti punti di minimo relativo ed anche assoluto (che è 0). Ci sono asintoti verticali nei punti di non definizione, non vi sono limiti per $x\to\infty$ e quindi non vi possono essere asintoti obliqui.

9. P. 100. Ad es. $f(x)=\frac{1}{x}$ definita su $]1,2[$ non ha né max né min (è definita su un intervallo limitato, ma non chiuso); un altro esempio può essere la tangente.

10. Per la retta tangente vd. es. p. 144. Per lo studio dei limiti richiesti: i.d.d.: $x>1$, $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$ ($\sqrt{x^2+5}$ si comporta come x, che è un infinito del primo ordine, superiore quindi a $\lg x$). Poi è: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$. La funzione sulla semiretta $x>1$ viene da $+\infty$ e va a $+\infty$; ha quindi certamente (almeno) un punto di minimo relativo, che è anche assoluto. La funzione è sempre derivabile, quindi deve esserci un punto in cui la derivata si annulla; infatti la derivata è continua, va da $-\infty$ a 1, e quindi ha almeno un punto in cui si annulla.