STORIA DELLA MATEMATICA

Corso di Dottorato
a.a. 2008-2009
Prof. Carlo Minnaja
minnaja@math.unipd.it
http://www.math.unipd.it/~minnaja

Orario

- Le lezioni si svolgeranno nei giorni:

- **24, 26, 31 marzo**
- **2, 6 aprile**

- in aula 2BC/30, ore 10.30-12.30

Bibliografia di base (generica)

- G. T. Bagni: *Storia della Matematica* (2 voll.), Pitagora, 1996
- C. B. Boyer: *Storia della matematica*, Mondadori, 1980
- E. Bell: *I grandi matematici*, Sansoni, 1966
- G. Loria: *Storia delle matematiche*, Hoepli, 1950

Argomenti del corso

- Sintesi della matematica conosciuta nel mondo mediterraneo antico dai papiri egiziani alla matematica mercantile del Medioevo
- La derivazione tra Fermat, Leibniz e Newton
- La matematica nel mondo napoleonico

Argomenti del corso

- I linguaggi universali: Cartesio, Leibniz, Bellavitis, Peano
- Banach e la matematica polacca tra le due guerre
- Il gruppo Bourbaki e l'algebrizzazione dell'analisi
- La matematica all'università di Padova

Bibliografia specifica

- **Matematica dal '700 in poi**:
  U. Bottazzini: *Il flauto di Hilbert*, UTET, 1990
- **Matematica padovana**:
  AA.VV.: *I matematici all'università di Padova dagli inizi al XX secolo*, Esedra, 2008
- **Autori singoli o argomenti specifici**:
  Wikipedia e *Le Scienze* (fascicoli monografici); altre monografie verranno indicate di volta in volta durante il corso

Diversità nella quantità: il contare

Diversità nella quantità

- Non solo l'uomo ha memoria ed immaginazione; anche molti altri animali sono capaci di distinguere il numero, la dimensione, l'ordine e la forma
- Moltissimi animali distinguono l'uno dal più di uno, il due dal "molti"

Alcuni animali contano

- Esperimenti con i corvi dimostrano che questi riescono a "contare" (= distinguere) almeno fino a quattro

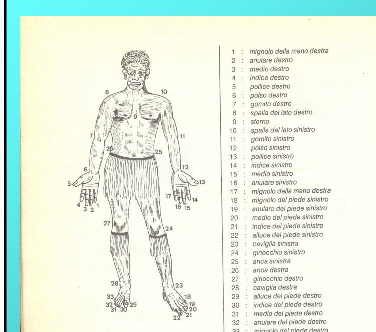
Diversità nella quantità

- Distinzione tra **uno**, due e più di due
- Importanza del numero **due**, della **coppia**
- Lingue con il **duale**:

residuo in italiano: *ambo* (*ambo* le mani), *ambiente*, *ambire*, *anfiteatro*, *anfibio* (dal greco αμφί)

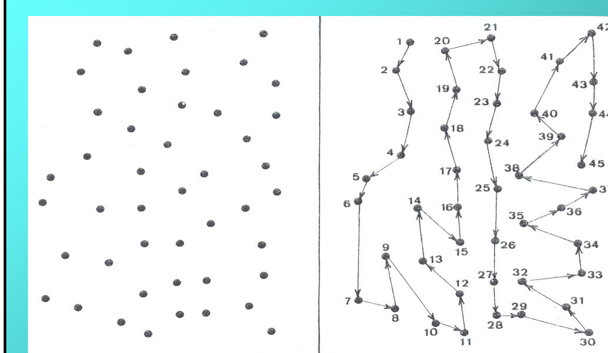
altre lingue: *beide*, *both* (radici diverse da *zwei*, *two*)

Il contare



Procedimento numerico corporale usato da alcune popolazioni delle isole dello stretto di Torres (braccio di mare tra l'Australia e la Nuova Guinea)

Il contare

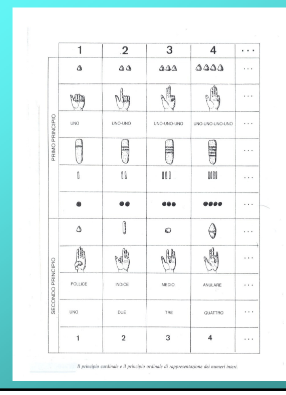


La nascita della numerazione

- **Vestonice**: primo esempio di numerazione (25.000-30.000 a.C.) (K. Absolom, 1937)
- Un osso di lupo su cui sono incise tacche con una tacca più profonda ogni cinque:

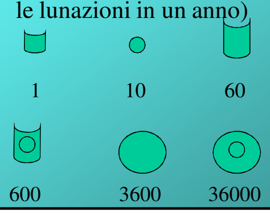
  55 tacche, divise in due serie, la prima di 25 e la seconda di 30, distribuite in gruppi di 5
- La **prima numerazione** sembra quindi essere stata in **base 5**

La nascita della numerazione



La nascita della numerazione

- Primo sistema di numerazione scritta:
  - **sumero** (3500-3000 a.C.): *misto* con base sessagesimale e decimale
  - *base sessagesimale*: 5x12 (dita di una mano per le lunazioni in un anno)



La nascita della numerazione

5 x 1 + 1 x 10 + 3 x 60 + 2 x 600 = 1395

Scrittura del numero 1395 nel sistema sumerico

La nascita della numerazione

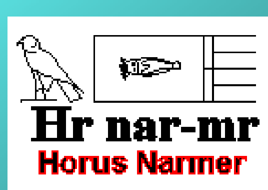
- **Occhio di Horus**
- Horus, Horo, scritto Hr (gli egiziani non scrivevano tutte le vocali), divinità egiziana (= colui che sta in alto) rappresentata dal falco
- Secondo il mito più accreditato, Horus era figlio di Osiride e di Iside; lottò contro il fratello Seth e nella lotta perse un occhio

La nascita della numerazione

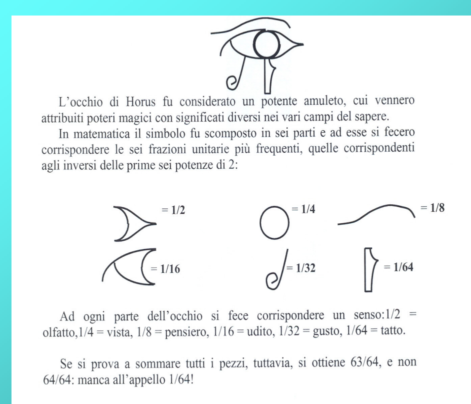
- Statua di **Horus**,
  tempio di Edfu, Egitto

La nascita della numerazione

- Horus fu considerato l'unificatore dei due regni dell'Alto e Basso Egitto e il faraone fu considerato la personificazione del dio Horus; vicino al suo nome si trova questo segno (=nome di Horus)



La nascita della numerazione



L'occhio di Horus fu considerato un potente amuleto, cui vennero attribuiti poteri magici con significati diversi nei vari campi del sapere.

In matematica il simbolo fu scomposto in sei parti e ad esse si fecero corrispondere le sei frazioni unitarie più frequenti, quelle corrispondenti agli inversi delle prime sei potenze di 2:

= 1/2 = 1/4 = 1/8

= 1/16 = 1/32 = 1/64

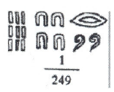
Ad ogni parte dell'occhio si fece corrispondere un senso:1/2 = olfatto,1/4 = vista, 1/8 = pensiero, 1/16 = udito, 1/32 = gusto, 1/64 = tatto.

Se si prova a sommare tutti i pezzi, tuttavia, si ottiene 63/64, e non 64/64: manca all'appello 1/64!

La nascita della numerazione

Per esprimere le frazioni, gli egizi si servivano, in genere, del geroglifico della bocca (segno che si leggeva è ***R*** e che, nel contesto, significava "parte") e lo mettevano sopra il numero facente funzione di denominatore:

Quando il denominatore non poteva venire rappresentato tutto intero sotto il segno della "bocca", scrivevano l'eccedenza di seguito:



La nascita della numerazione

Alcune frazioni, come 1/2, 2/3, e 3/4 erano invece raffigurate con segni speciali:

1/2 =  o 

2/3 =  o  o  ovvero "le due parti"

3/4 =  ovvero "le tre parti"

Matematica egiziana

- Gli scribi egiziani erano abbastanza abili a fare di conto, a risolvere problemi di primo e di secondo grado (anche sistemi)
- In vari papiri (Rhind, Mosca, Berlino) si trovano problemi pratici, come dividere un certo numero di pagnotte o come calcolare il volume di solidi

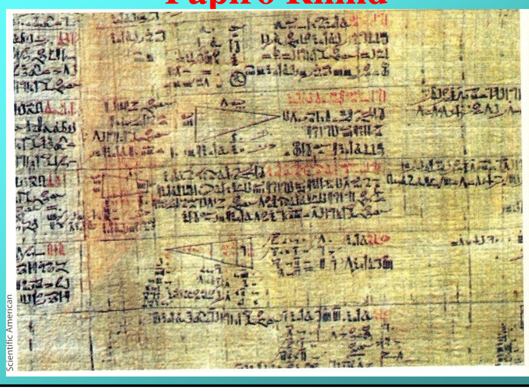
Matematica egiziana
Papiro Rhind

- Papiro **Rhind** (m. 3 x cm. 33)
- Henry Rhind, antiquario scozzese, lo acquista nel 1858 a Luxor

  copiato ca. 1650 a. C. dallo scriba **Ahmes** da un altro papiro 2000-1800 a.C.

  contiene tavole numeriche e 84 problemi aritmetici, algebrici, geometrici

Matematica egiziana
Papiro Rhind



Matematica egiziana
Papiro di Berlino

- Papiro di **Berlino:**
- Ti si dice che l'area di un quadrato di 100 cubiti è pari alla somma delle aree di due quadrati più piccoli. Il lato di uno di questi quadrati è 1/2+1/4 del lato dell'altro.
- Fammi sapere le lunghezze di questi lati.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

Matematica egiziana
Papiro di Mosca

- **Papiro di Mosca** (detto anche "papiro di Goleniscev" dal suo primo possessore), ca. 1850 a.C., cm. 544 x 8:
  - 25 esempi di calcoli e problemi matematici
- Problema 14: *calcolare il volume di un tronco di piramide a base quadrata*
- Formula per calcolare la superficie di un emisfero

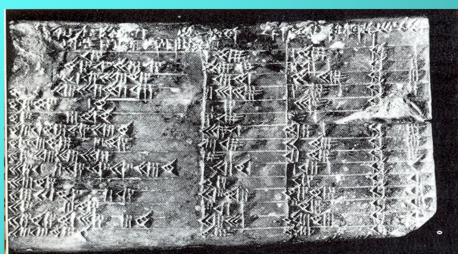
Matematica babilonese

- Numerazione in base mista 10 e 60
- Il 60 ha molti divisori, tra cui il 3 e il 4, mentre il 10 ne ha due soli
- Tabelle di reciproci, in cui vengono saltati i quozienti periodici
- Terne pitagoriche:

  numeri interi *a, b, c* tali che

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Matematica babilonese
Terne pitagoriche



Terne di numeri interi a, b, c che soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$

Matematica babilonese
Terne pitagoriche

- Certamente gli autori di tali tavole conoscevano formule con cui si potevano costruire terne pitagoriche, ad es., dati due interi p e q risultano terne pitagoriche le terne a, b, c così costruite

$$a = p^2 - q^2$$
$$b = 2\,p\,q$$
$$c = p^2 + q^2$$

Lo zero e i calcoli algebrici

- Lo **zero** era ben noto ai babilonesi, che però non lo scrivevano sempre; gli egiziani non lo consideravano
- né babilonesi né egiziani consideravano i numeri negativi
- babilonesi ed egiziani erano abili calcolatori nel risolvere con artifici sistemi di primo grado anche con parecchie equazioni, ed equazioni di secondo (scartando sempre eventuali radici negative)

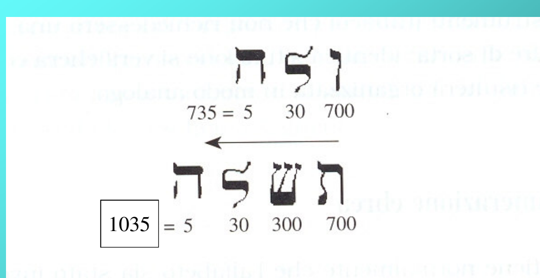
La numerazione

La numerazione ebraica

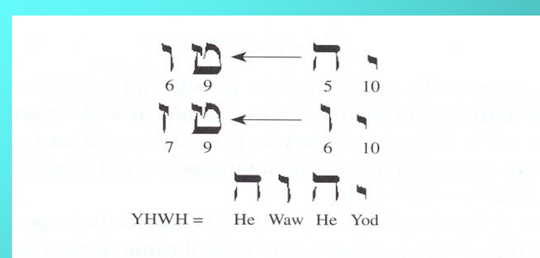
- Gli **ebrei** furono i primi ad istituire una numerazione basata sulle lettere dell'alfabeto, utilizzando anche le varianti delle lettere usate in fine di parola

La numerazione ebraica

La numerazione ebraica



La numerazione ebraica



15= 9+6 (non 10+5); 16 = 9+7 (non 10+6) per non pronunciare invano il nome di Javeh

La numerazione ebraica

- Il numero massimo che si trova nei Testamenti tramandatici dalla civiltà ebraica sembra essere
- *duecento migliaia di migliaia di cavalieri* (due miriadi di miriadi)

(*Apocalisse*, 9:16)

La numerazione greca

- La numerazione **greca arcaica** non differiva dal sistema egiziano: un numero era formato dalla giustapposizione di vari simboli
- La numerazione greca tramite le lettere dell'alfabeto ha seguito quella ebraica ed è attestata a partire dal I sec. a. C.

La numerazione greca

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unità:	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
Decine:	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
Centinaia:	ρ	σ	ρ	υ	φ	ε	ψ	ω	ϡ
Migliaia:	,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ϖ	,ζ	,η	,θ

La numerazione greca

In questo modo l'ordine delle cifre è inessenziale:

ρκγ = κργ =123

esistono in più il *koppa* e il *sampi* rispettivamente per il 90 e il 900

solo quando si passa alle migliaia si usano le lettere precedute da un apice in basso

La numerazione greca

- In tale modo si arrivava soltanto a 9999
- poi si contava per *miriadi* e si utilizzava la μ maiuscola (che si scrive M) che indicava la moltiplicazione per 1000

Altri sistemi di numerazione

- E' credenza comune che l'alfabeto sia stato inventato dai **Fenici** attorno al XV sec. a. C.
- Forse non è così semplice, ma certamente tutti gli alfabeti primitivi della zona mediterranea sono derivati da quello fenicio, e quindi basati su 22 segni, eventualmente modificati

Altri sistemi di numerazione

La numerazione **romana** non era fondamentalmente posizionale, ma era basata sul significato dei segni:

I, II, III, IIII (poi: IV), V, VI, VII, VIII, VIIII (poi: IX), X, XX, XXX, XXXX (poi: XL), L, LX, LXX, LXXX, LXXXX (poi: XC), C, D, M

Sistema estremamente complicato per effettuare le operazioni

Altri sistemi di numerazione

- La numerazione **Maya** aveva base 20, i numeri venivano scritti dall'alto in basso, con punti e trattini, ed esisteva un simbolo per lo 0

Bibliografia sulla storia dei numeri

- **Ifrah, Georges**: Storia universale dei numeri, Milano, 1989
- **Ifrah, Georges** - Enciclopedia universale dei numeri; introduzione di Piergiorgio Odifreddi, Milano, 2008

La matematica presso i Greci

La matematica presso i Greci

ἀγεωμέτρητος μη εἰσίτω

μεδεὶς ἀγεωμέτρικος εἰσίτω
(Accademia)

ἀεὶ ὁ θεός γεωμετρίζει
(attribuito da Plutarco a Platone)

La matematica presso i Greci

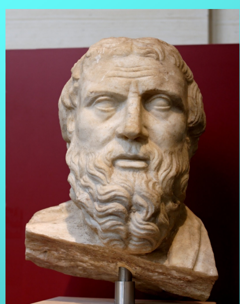
Nascita della dimostrazione:
gli "elementi" di Ippocrate di Chio(x) (circa 450 a.C.) scuola Ionica).

Evoluzione dei significati

μάθημα = scienza, disciplina, studio
μάθησις = apprendimento, cognizione
τὰ μαθηματικά, οἱ μαθηματικοί
θεώρημα = spettacolo
ἀπαγωγή = il condurre da un luogo ad un altro
ἀδύνατος = impossibile
ἀπαγωγή εἰς τὸ ἀδύνατον =
= dimostrazione per assurdo

(x) Lo stesso titolo avrà l'opera di Euclide e dei successori: στοιχεῖα

La nascita della geometria



- **Erodoto** (484 a.C. - 425 a.C.) fissa la nascita della geometria in Egitto per la necessità di rimisurare i terreni dopo le inondazioni del Nilo

La nascita della geometria

- **Aristotele** (384 a.C. - 322 a.C.) ritiene che la geometria nasca in Egitto stimolata da una classe agiata di sacerdoti

Il numero

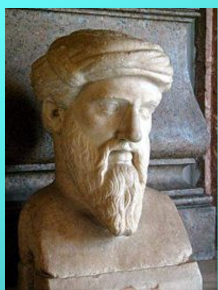
- Prima definizione di numero (**Talete di Mileto**):

  numero è un sistema di unità

Talete

- **Talete** (c. 640/624 a. C. - 547 a. C.): primo filosofo della civiltà occidentale, uno dei sette saggi dell'antichità, osservatore della natura, astronomo, matematico

Pitagora



Pitagora di Samo

πειθω = persuado

αγορά = piazza

(ca. 575 - ca. 490)

Pitagora

Pitagora, dopo viaggi in Asia Minore e in Egitto, venne a stabilirsi nella Magna Grecia, a Crotone, una colonia dorica; attorno a lui si raccolse un movimento misticheggiante (purificazione dell'anima)

- prese posizioni politiche e fu avversato dalle autorità costituite
- non lasciò nulla di scritto e vietò ai suoi discepoli di comunicare le scoperte agli estranei

Pitagora

Euclide e Pitagora, ovvero la geometria e l'aritmetica; formella di Luca Della Robbia nel Campanile di Giotto

Pitagora

Pitagora raffigurato in una moneta romana

I Pitagorici - Filolao

- **Filolao** (470 a.C.-390 a.C.)

originario di Crotone secondo Diogene Laerzio, di Taranto secondo tutte le altre fonti

visse a Crotone qualche decennio dopo Pitagora, fu perseguitato perché pitagorico

si rifugiò a Tebe, dove c'era un popolo di stirpe affine a quella che aveva fondato Crotone

I Pitagorici - Filolao

- A Tebe aprì una scuola
- dei suoi scritti possediamo solo pochi frammenti
- diffuse per primo gli scritti pitagorici, fino allora tenuti segreti dagli iniziati
- propose una profonda revisione della dottrina cosmologica pitagorica, che invece era fondata sulla sfericità della Terra e sul geocentrismo

I Pitagorici - Filolao

- Cosmologia di Filolao:
- al centro dell'universo c'è un fuoco, *Hestia*
- attorno ad Hestia ruotano:

anti-Terra, Terra, Luna, Sole, i 5 pianeti e le stelle fisse

- Aristarco (III sec. a. C.) proporrà l'ipotesi eliocentrica

I Pitagorici - Filolao

- Filolao fu anche medico: sostenne tesi diverse da quelle di Alcmeone, il massimo medico della scuola di Crotone, sulla composizione del corpo umano, costituito da solo caldo, e nel quale entrano dall'esterno i principi attivi del freddo, dell'umido e del secco, la cui dialettica costituisce l'equilibrio vitale

I Pitagorici - Filolao

- Con Alcmeone e diversamente da Pitagora sostenne invece che l'anima e il corpo sono indissolubilmente legati come l'armonia con le corde: se le corde si tagliano o la lira si spezza l'armonia svanisce

Scuola pitagorica

- Tutti gli oggetti sono fatti di punti, e quindi tutto l'universo è costituito di punti
- i punti si susseguono: $N_{k+1} = N_k + 1$
- (ovviamente **non** era questa la notazione)
- Numeri *triangolari*: 1, 3, 6, 10, 15, ...

•
• •
• • •
• • • •

Scuola pitagorica

- Se N è un quadrato e si organizzano N oggetti a quadrato si dimostra subito che ogni quadrato è la somma seguente:
    - $N^2 = (N-1)^2 + N + (N-1)$

• ° • ° •
° ° • ° •
• • • ° •
° ° ° ° •
• • • • •

Scuola pitagorica

- Costruzione dei solidi regolari
- soluzione geometrica di alcune equazioni algebriche
- riconoscimento che Vespero e Lucifero erano lo stesso corpo celeste

Scuola pitagorica

- Scoperta che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale
- Scoperta della relazione tra gli angoli interni di un poligono di *n* lati:

$$2n - 4 \text{ angoli retti}$$

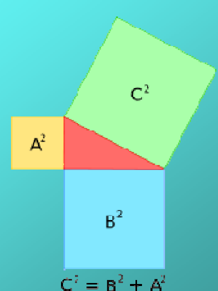
Per il triangolo è la ben nota:

la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti

Scuola pitagorica

- Un'altra della proprietà geometriche che vengono attribuite alla scuola pitagorica è il *teorema di Pitagora*, già noto molti secoli prima fin dai babilonesi, che scrivevano terne pitagoriche o il triangolo di corda egizio, basato sui numeri 3, 4, 5.

Teorema di Pitagora



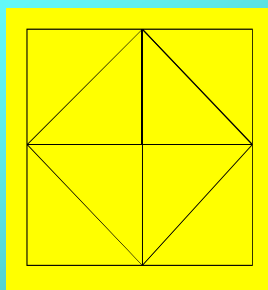
Teorema di Pitagora

- Una gustosa dimostrazione del teorema, nel caso di un triangolo rettangolo *isoscele* si ha in *Menone*, un dialogo di Platone, dove Socrate insegna ad un ragazzo che se a è la lunghezza dei cateti e d quella dell'ipotenusa, risulta

$$2a^2 = d^2$$

(problema della duplicazione del quadrato)

Teorema di Pitagora



- Teor. di Pitagora per il **triangolo rettangolo *isoscele***:

  se a è il lato e d la diagonale si vede che l'area del quadrato grande è $4a^2$ e quindi l'area del quadrato sull'ipotenusa è

  $$d^2 = 2a^2$$

  da cui $d = \sqrt{2}\, a$ (nella notazione odierna)

Teorema di Pitagora

Interviene qui la radice di 2, ma non direttamente, perché Socrate non estrae poi la radice, ma fa un ragionamento geometrico

Teorema di Pitagora (babilonese)

Tavoletta paleobabilonese (1800-1600 a.C)

Quadrato con due diagonali:

lato del quadrato: 30

sulla diagonale sono scritti due gruppi di numeri:

1;24, 51, 10

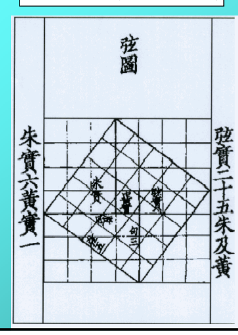
$(1+24/60+51/60^2+10/60^3=$
$=1{,}414213 \sim \sqrt{2})$

42;25, 35

$(42+25/60+35/60^2 =$
$=42{,}42639 \sim 30\sqrt{2})$

Teorema di Pitagora (cinese)

Hsuan-thu (1200 a.C. ?)



Triangolo di lati 3, 4, 5

Se si contano i numeri dei quadretti si nota che è

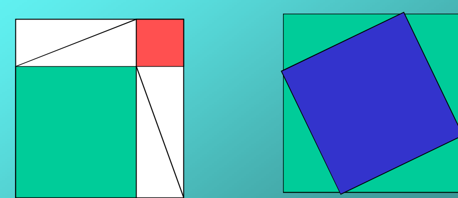
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Teorema di Pitagora (indiano)

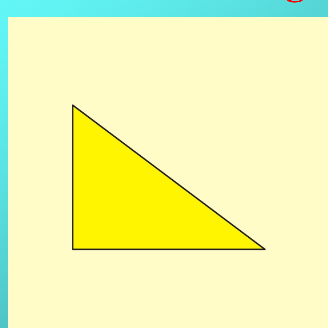
- Una dimostrazione del teorema di Pitagora si trova in un libro indiano, *Lilavati* (il bello), che però fa riferimento ad un *salvasutra* forse dell'800 a.C.
- **Sutra** è un corpo di conoscenze scientifiche o rituali, mentre **salva** è la corda, e il *salvasutra* a cui ci riferiamo riporta numerosi esempi di misurazioni di lunghezze fatte con la corda, tra cui la costruzione di triangoli rettangoli.

Teorema di Pitagora (indiano)

- Dimostrazione: बोध = "guarda"



Teorema di Pitagora



La logica

Aristotele

Aristotele e Platone
(formella di Luca
della Robbia
nel campanile di Giotto)

Aristotele

- Nasce a Stagira, in Macedonia nel 384 a. C.
- è figlio del medico reale e vive nella capitale Pella
- rimasto orfano va da un precettore in Asia Minore e quindi viene mandato ad Atene

Aristotele

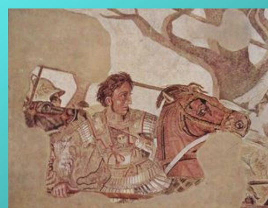
- Studia nell'Accademia fondata da Platone (che allora era in Sicilia e tornerà ad Atene nel 364 a. C.)
- studia dapprima **matematica**, poi **dialettica**
- la scuola di matematica è retta da **Eudosso di Cnido**
- Scrive poi di filosofia, sull'anima

Aristotele

Alla morte di Platone (327 a. C.) come maestro dell'Accademia subentra suo nipote Speusippo, e Aristotele lascia l'Accademia; fonda una scuola filosofica, e poi va sull'isola di Mitilene (Asia Minore); nel 342 viene chiamato dal re di Macedonia per fare il precettore a suo figlio Alessandro (Magno)

Aristotele

Busto di Alessandro Magno
(British Museum)



Alessandro Magno
alla battaglia di Isso
(Museo Nazionale di Napoli)

Aristotele

Quindi si stabilisce ad Atene nel 335 ca. e fonda nel ginnasio Liceo (perché dedicato ad Apollo Licio) la scuola peripatetica

Aristotele

- Aristotele scrisse numerose opere, tra le quali la *Metafisica* e la *Logica*
- vi si trovano dissertazioni di meccanica, fisica, matematica, botanica, psicologia, economia

Aristotele

- Le teorie devono essere basate su un certo numero di proposizioni indimostrabili:
- **nozioni comuni** (*assiomi*), caratteristiche di qualsiasi scienza
- **nozioni specifiche** (*postulati*), che sono caratteristiche della scienza particolare e che fissano il significato dei concetti fondamentali
- il resto va dimostrato

Aristotele - Logica

- Tre **principi logici** fondamentali

- Principio di **identità**:
  una proposizione è uguale a se stessa

Aristotele - Logica

- Principio di **non contraddizione:**
  "Non è lecito affermare che qualcosa sia e non sia nello stesso modo ed allo stesso tempo."
  Aristotele, *Metafisica*, 3, 6
- Principio del **terzo escluso**:
  tra una proposizione e la sua negazione almeno una è vera

Aristotele - Logica

- Il **sillogismo** come primo esempio di dimostrazione:
- **premessa maggiore** (vi compaiono un *predicato* e un *termine medio*)
- **premessa minore** (vi compaiono un *soggetto* e un *termine medio*)
- **conclusione** (vi compaiono un *soggetto* e un *predicato*)

Aristotele - Logica

- **PM**: tutti gli uomini sono mortali
- **Pm**: tutti gli ateniesi sono uomini
- **Conclusione**: tutti gli ateniesi sono mortali

- La logica aristotelica tratterà anche diversi tipi di sillogismo

Aristotele - Logica

- **Paradosso**
- Consiste nel presentare una proposizione di cui nessuno potrà dire se è vera o falsa
- Paradosso del mentitore:

  "**Io sto mentendo**"
- Questa proposizione non è analizzabile usando la logica a due valori

Logica

- L'uso di un ragionamento basato sulla logica per dimostrare proprietà matematiche appare soltanto in Aristotele (con alcuni precedenti in Zenone, Anassagora, Platone) e nella matematica indiana
- Dimostrazione *per assurdo*