

## La probabilità

- Gli inizi della teoria della probabilità possono farsi risalire a Fermat e a un grande genio matematico che si dedicò invece al misticismo: Pascal

## Pascal

- **Blaise Pascal** (1623-1669) si dedicò alla matematica fin dalla primissima giovinezza leggendo gli *Elementi* di Euclide datigli dal padre; scrisse il suo primo lavoro di geometria a 16 anni



## Pascal

- Riscopri indipendentemente dagli studiosi precedenti l'algoritmo per calcolare i coefficienti della potenza di un binomio, (ora noto come "triangolo di Tartaglia"); in idrostatica formulò il cosiddetto principio di Pascal, ovvero il principio secondo il quale la pressione esercitata in un punto qualunque di un liquido incompressibile si trasmette inalterata in tutti gli altri punti di tale liquido (inventò la siringa)

## Pascal

- Fece chiarezza sul concetto di "pressione" per cui l'unità di pressione è chiamata *pascal*; intuì che la pressione atmosferica diminuisce con l'altitudine e fece fare (e poi ripeté lui stesso) degli esperimenti a prova di questo asserto

## Pascal

- Fu, insieme a Fermat, il creatore della teoria della probabilità, per quanto numerosi teoremi sull'argomento fossero stati già enunciati un secolo prima da Cardano (ma verranno pubblicati solo nel 1663) e da Huygens; il problema della ripartizione della posta in gioco quando il gioco si interrompe era già stato posto da Luca Pacioli.

## Pascal

- Fermat aveva posto il problema:
- *Se si lanciano più volte due dadi, quanti lanci sono necessari affinché si possa scommettere con vantaggio che esca il doppio sei?*
- "Scommettere con vantaggio" significava, nei termini odierni, "scommettere con probabilità di vincere più alta che non di perdere"

### Pascal

- Chiaramente il doppio 6 ha  $1/36$  di probabilità di presentarsi essendo  $1/6$  la probabilità di ciascuna faccia ed essendo l'uscita delle varie facce nei due dadi eventi tra loro indipendenti. Il non presentarsi ha dunque la probabilità  $35/36$ , e dopo  $n$  lanci (eventi chiaramente indipendenti) la probabilità che *non* esca il doppio 6 è  $(35/36)^n$

### Pascal

- Al tendere di  $n$  all'infinito tale probabilità tende a 0. Quando questa probabilità diventa  $<1/2$  (ciò si ha per  $n = 24$ ), allora diventa conveniente scommettere sull'uscita del doppio 6.

### Pascal

- Pascal ricevette anche una visita di Cartesio con il quale però i rapporti rimasero freddi (Cartesio non voleva credere che Pascal avesse scritto di geometria così giovane)
- Continua sporadicamente ad occuparsi di matematica; muore tra le convulsioni, probabilmente per una lesione al cervello

## La nascita della topologia

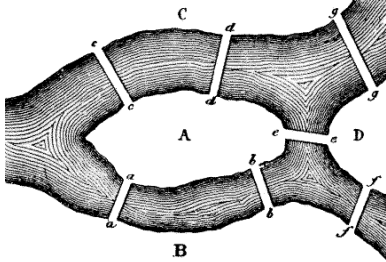
### I ponti di Königsberg



### I ponti di Königsberg

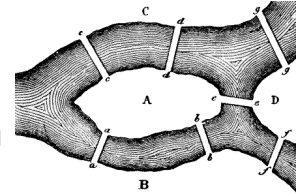
Siamo a Königsberg, nel 1759. Il fiume che attraversa la città si divide in due rami formando un'isola in corrispondenza della biforcazione. Il territorio è diviso in 4 aree come si vede nella figura qui sotto: l'isola A, le due sponde B, C e la parte interna alla biforcazione D

### I ponti di Königsberg



### I ponti di Königsberg

Le 4 aree sono collegate da 7 ponti:  
 A-C sono collegate dai ponti c, d;  
 A-B sono collegate dai ponti a, b;  
 D-A sono collegate dal ponte e;  
 D-C sono collegate dal ponte g;  
 D-B sono collegate dal ponte f



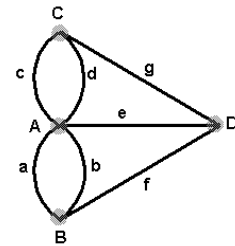
### I ponti di Königsberg

- E' possibile fare una passeggiata attraversando esattamente una sola volta tutti i ponti?
- Il problema dei ponti di Königsberg si può ricondurre alla seguente figura.

### I ponti di Königsberg

E' possibile tracciarla con un solo tratto di penna senza mai staccare la penna dal foglio e percorrendo tutte le linee una sola volta?

**Non è possibile!**



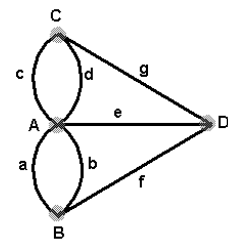
### I ponti di Königsberg

Una figura di questo tipo, formata da punti nodali (A, B, C, D) e da linee che li congiungono (a, b, c, d, e, f, g), si chiama **grafo**.

I punti A, B, C, D si chiamano **nodi**.  
 Le linee a, c, d, e, f, g si chiamano **archi** (o lati o segmenti).  
 Le superficie chiuse limitate da una serie di archi si chiamano **regioni**.

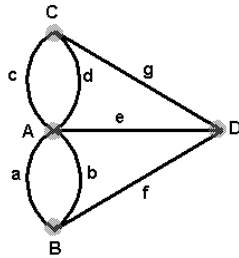
### I ponti di Königsberg

Il numero di archi che escono da un nodo si chiama **ordine** del nodo. Ad esempio l'ordine del nodo A è 5 mentre l'ordine del nodo D è 3.



### I ponti di Königsberg

- Quando si dice "nodo pari" o "nodo dispari" si intende rispettivamente "nodo di ordine pari" o "nodo di ordine dispari"



### I ponti di Königsberg

- La possibilità di tracciare grafi con un solo tratto di penna è soggetta alle seguenti leggi:
- 1) Le figure che **non hanno nodi dispari** si possono tracciare con un tratto continuo partendo da un nodo qualunque.
- 2) Una figura che **ha esattamente 2 nodi dispari** può essere tracciata con un tratto continuo partendo da uno di essi.

### I ponti di Königsberg

- 3) Le figure che **hanno più di 2 nodi dispari** non possono essere tracciate con un tratto continuo.

### I ponti di Königsberg

- Eulero stabilì che un grafo composto soltanto da nodi pari, cioè ciascuno collegato a un numero pari di archi, è sempre percorribile e che si può ritornare al punto di partenza senza sovrapposizioni di percorso.

### I ponti di Königsberg

- Se un grafo contiene nodi pari e soltanto due nodi dispari è ancora percorribile, ma non si può più ritornare al punto di partenza.

### I ponti di Königsberg

- Se contiene invece più di due nodi dispari, non è percorribile senza sovrapposizioni di percorso.
- La passeggiata sui ponti di Königsberg è di quest'ultimo tipo, porta a un grafo composto da quattro nodi dispari, e quindi il problema di partenza ha risposta negativa

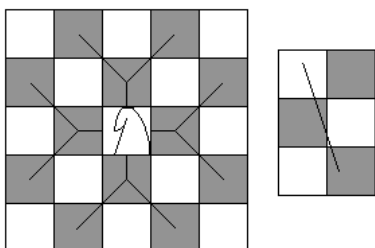
## I ponti di Königsberg

- Quello che sembrava un piccolo rompicapo senza importanza, nelle mani di Eulero diventò un grande problema matematico, punto di partenza della teoria dei grafi e di una nuova scienza: la topologia, destinata a grandi sviluppi, un secolo più tardi.

## I ponti di Königsberg



## Il salto del cavallo



## Il salto del cavallo

- Poiché esistono molte mosse diverse che consentono al cavallo di saltare da una casella all'altra, si può disegnare un cammino chiuso in cui tutte le possibili MOSSE siano tracciate una ed una sola volta? (grafo euleriano)

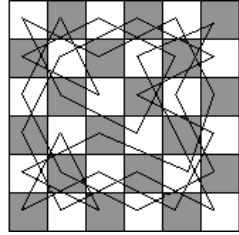
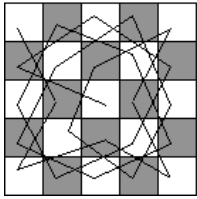
## Il salto del cavallo

- È possibile, per il cavallo, occupare tutte le CASELLE di una scacchiera  $n \times n$  ciascuna esattamente una volta prima di ritornare sulla stessa casella da cui è partito? (grafo hamiltoniano)

## Il salto del cavallo

- **TEOREMA:** Il cavallo, saltando su una scacchiera  $n \times n$ , può occupare tutte le caselle ciascuna esattamente una volta descrivendo un cammino hamiltoniano  $\Leftrightarrow n \geq 5$  (G. Zammillo, 2000).

**Il salto del cavallo**



**Il salto del cavallo**

