MASTER 2007-2008
Comunicazione della Scienza

Linguaggi e fondamenti concettuali della matematica

Prof. Carlo Minnaja

minnaja@math.unipd.it

http://www.math.unipd.it/%7Eminnaja

Diversità nella quantità

- Non solo l'uomo ha memoria ed immaginazione; anche molti altri animali sono capaci di distinguere il numero, la dimensione, l'ordine e la forma
- Moltissimi animali distinguono l'uno dal più di uno, il due dal "molti"

Diversità nella quantità

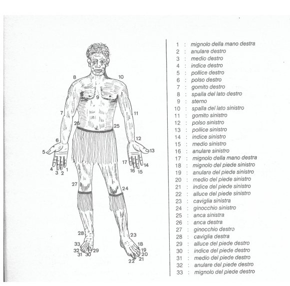
- La capacità di coordinamento in insiemi di esseri viventi composti di molti elementi rende ragione delle costruzioni di formicai, termitai, dighe fatte dai castori, aggressività di sciami di api o vespe, carica di quadrupedi contro un comune nemico
- sono sopravvissute solo quelle specie che hanno saputo trovare la consapevolezza che il grande numero (oltre che la dimensione corporea e la grande mobilità) è il miglior mezzo di difesa e di autoconservazione

Il contare

- Parti del corpo per contare:

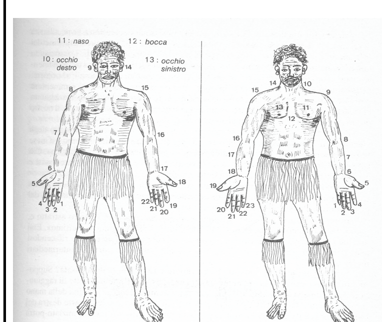
le dita delle mani, delle mani e dei piedi, altre parti del corpo

Il contare



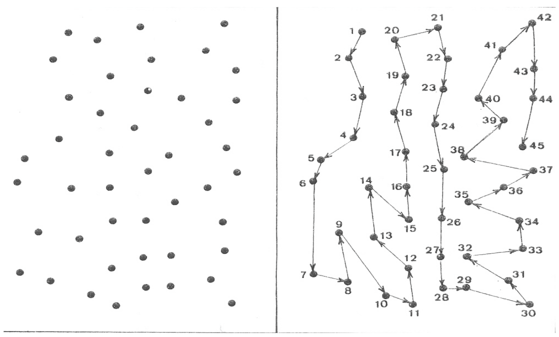
Procedimento numerico corporale usato da alcune popolazioni delle isole dello stretto di Torres (braccio di mare tra l'Australia e la Nuova Guinea)

Il contare



Procedimento usato nella Nuova Guinea dai Papua (a sinistra) e dagli Elema (a destra)

Il contare



Alcuni animali contano

- Esperimenti con corvi: riescono a “contare” (= distinguere) almeno fino a quattro

La nascita della numerazione

- **Vestonice**: primo esempio di numerazione

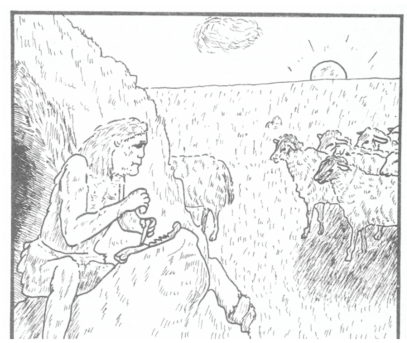
(25.000-30.000 a.C.) (K. Absolom, 1937):

un osso di lupo su cui sono incise tacche con una tacca più profonda ogni cinque:

55 tacche, divise in due serie, la prima di 25 e la seconda di 30, distribuite in gruppi di 5:

la **prima numerazione** sembra quindi in **base 5**

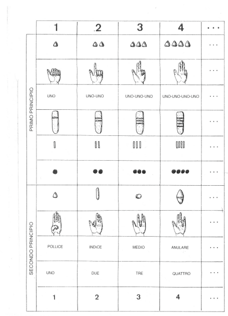
La nascita della numerazione



La nascita della numerazione

- Cumuli di pietre
- Ciò precede la nascita della scrittura e della civiltà conosciuta come tale (produzione di manufatti)

La nascita della numerazione



Il principio cardinale e il principio ordinale di rappresentazione dei numeri interi.

Matematica egiziana

- Gli scribi egiziani erano abbastanza abili a fare di conto, a risolvere problemi di primo e di secondo grado (anche sistemi)
- in vari papiri (Rhind, Mosca, Berlino) si trovano problemi pratici, come dividere un certo numero di pagnotte o come calcolare il volume di solidi

Matematica egiziana

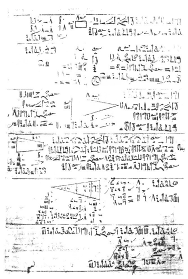
- Papiro **Rhind** (m. 3 x cm. 33)
- Henry Rhind, antiquario scozzese lo

acquista nel 1858 a Luxor

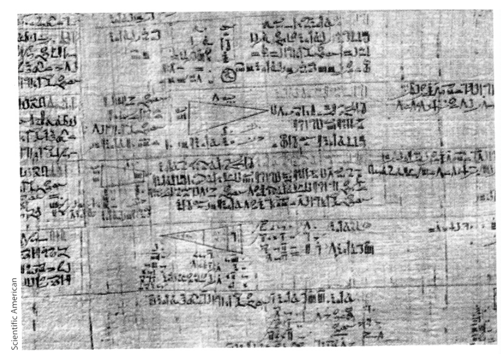
copiato ca. 1650 a. C. dallo scriba **Ahmes** da un altro papiro 2000-1800 a.C.

contiene tavole numeriche e 84 problemi aritmetici, algebrici, geometrici

Papiro Rhind



Papiro Rhind



Matematica egiziana

- **Papiro di Mosca** (detto anche “papiro di Goleniscev):
- 25 esempi di calcoli e problemi matematici
- problema 14: *calcolare il volume di un tronco di piramide a base quadrata*
- formula per calcolare la superficie di un emisfero

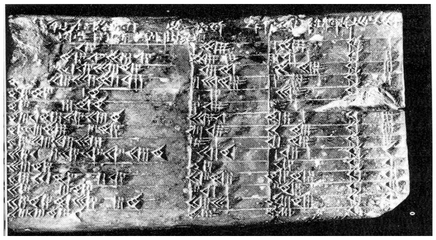
Matematica babilonese

- Numerazione in base mista 10 e 60
- il 60 ha molti divisori, tra cui il 3 e il 4, mentre il 10 ne ha due soli
- Tabelle di reciproci, in cui vengono saltati i quozienti periodici
- Terne pitagoriche: numeri interi *a, b, c*

tali che

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Matematica babilonese
Terne pitagoriche



Terne di numeri interi a, b, c che soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$

La matematica presso i Greci

ἀγεωμέτρητος μη εἰσίτω

μεδεὶς ἀγεωμέτρικος εἰσίτω

(Accademia)

ἀεί ὁ θεός γεωμετρίζει

(attribuito da Plutarco a Platone)

La matematica presso i Greci

Nascita della dimostrazione:
gli "elementi" di Ippocrate di Chio(x) (circa 450 a.C.) scuola Ionica).

Evoluzione dei significati

μάθημα = scienza, disciplina, studio

μάθησις = apprendimento, cognizione

τὰ μαθηματικά, οἱ μαθηματικοὶ

θεώρημα = spettacolo

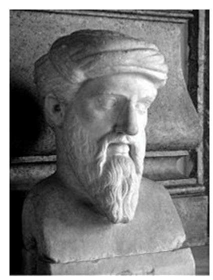
ἀπαγωγή = il condurre da un luogo ad un altro

ἀδύνατος = impossibile

ἀπαγωγή εἰς τὸ ἀδύνατον = = dimostrazione per assurdo

(x) Lo stesso titolo avrà l'opera di Euclide e dei successori: στοιχεῖα

Pitagora



Pitagora di Samo

πειθω = persuado

αγορά = piazza

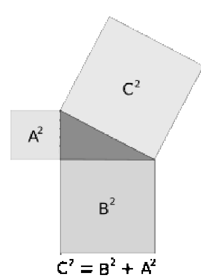
(ca. 575 - ca. 490)

Pitagora

Pitagora, dopo viaggi in Asia Minore e in Egitto, venne a stabilirsi nella Magna Grecia, a Crotone, una colonia dorica; attorno a lui si raccolse un movimento misticheggiante (purificazione dell'anima)

- prese posizioni politiche e fu avversato dalle autorità costituite
- non lasciò nulla di scritto e vietò ai suoi discepoli di comunicare le scoperte agli estranei

Teorema di Pitagora



Teorema di Pitagora

- Una gustosa dimostrazione del teorema, nel caso di un triangolo rettangolo *isoscele* si ha in *Menone*, un dialogo di Platone, dove Socrate insegna ad un ragazzo che se a è la lunghezza dei cateti e d quella dell'ipotenusa, risulta
  - $2a^2 = d^2$
- (problema della duplicazione del quadrato)

Teorema di Pitagora (babilonese)

Tavoletta paleobabilonese (1800-1600 a.C)

Quadrato con due diagonali:

lato del quadrato: 30

sulla diagonale sono scritti due gruppi di numeri:

1;24, 51, 10
$(1+24/60+51/60^2+10/60^3= =1{,}414213 \sim \sqrt{2})$

42;25, 35

$(42+25/60+35/60^2 = =42{,}42639 \sim 30\sqrt{2})$

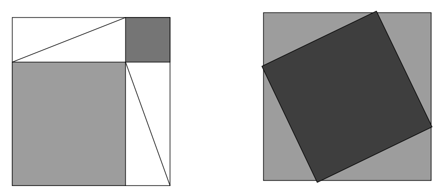
Teorema di Pitagora (indiano)

- Una dimostrazione del teorema di Pitagora si trova in un libro indiano, *Lilavati* (il bello), che però fa riferimento ad un *salvasutra* forse dell'800 a.C.
- **Sutra** è un corpo di conoscenze scientifiche o rituali, mentre **salva** è la corda, e il *salvasutra* a cui ci riferiamo riporta numerosi esempi di misurazioni di lunghezze fatte con la corda, tra cui la costruzione di triangoli rettangoli.

Teorema di Pitagora (indiano)

- Dimostrazione:

बोध = "guarda"



Aristotele

Aristotele e Platone
(formella di Luca della Robbia nel campanile di Giotto)

Aristotele

- Studia nell'Accademia fondata da Platone (che allora era in Sicilia e tornerà ad Atene nel 364 a. C.)
- studia dapprima **matematica**, poi **dialettica**
- la scuola di matematica è retta da **Eudosso di Cnido**
- Scrive poi di filosofia, sull'anima

Aristotele

- Aristotele scrisse numerose opere, tra le quali la *Metafisica* e la *Logica*
- vi si trovano dissertazioni di meccanica, fisica, matematica, botanica, psicologia, economia

Aristotele

- Le teorie devono essere basate su un certo numero di proposizioni indimostrabili:
- **nozioni comuni** (*assiomi*), caratteristiche di qualsiasi scienza
- **nozioni specifiche** (*postulati*), che sono caratteristiche della scienza particolare e che fissano il significato dei concetti fondamentali
- il resto va dimostrato

Aristotele - Logica

- Tre **principi logici** fondamentali:
- principio di **identità**: una proposizione è uguale a se stessa

Aristotele - Logica

Principio di **non contraddizione:**

"Non è lecito affermare che qualcosa sia e non sia nello stesso modo ed allo stesso tempo."

Aristotele, *Metafisica*, 3, 6

principio del **terzo escluso**: tra una proposizione e la sua negazione almeno una è vera

Aristotele - Logica

- Il **sillogismo** come primo esempio di dimostrazione:
- **premessa maggiore** (vi compaiono un *predicato* e un *termine medio*)
- **premessa minore** (vi compaiono un *soggetto* e un *termine medio*)
- **conclusione** (vi compaiono un *soggetto* e un *predicato*)

Aristotele - Logica

- **PM**: tutti gli uomini sono mortali
- **Pm**: tutti gli ateniesi sono uomini
- **Conclusione**: tutti gli ateniesi sono mortali

- La logica aristotelica tratterà anche diversi tipi di sillogismo

Logica

- L'uso di un ragionamento basato sulla logica per dimostrare proprietà matematiche appare soltanto in Aristotele (con alcuni precedenti in Zenone, Anassagora, Platone) e nella matematica indiana
- Dimostrazione *per assurdo*

I tre problemi classici della matematica greca

- **trisezione dell'angolo**
- **duplicazione del cubo** (problema di Delo)
- **quadratura del cerchio**

che dovevano essere risolti soltanto con la riga (non graduata) e con il compasso, cioè unendo punti con rette e trovando intersezioni tra rette e circonferenze

I primi due sono algebrici, il terzo è trascendente

I tre problemi classici della matematica greca

- Anche il problema della **quadratura del cerchio** si può risolvere tramite la curva trisettrice di Ippia (chiamata anche, per questo, curva **quadratrice**)

I tre problemi classici della matematica greca - π

$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ formula egizia per l'area del cerchio; se ne ricava $\pi \approx 256/81 \simeq 3,1605$

Secondo i babilonesi $\pi \simeq \frac{25}{8} = 3,125$

Mille anni dopo, regnando Salomone, $\pi \simeq 3$ (Liber tertius regum, VII, 23) v. anche Liber secundus paralipomenon IV, 2) "Fecit quoque mare fusile decem cubitorum a labio usque ad labium, rotundum in circuitu, quinque cubitorum altitudo ejus, et resticula triginta cubitorum cingebat illud per circuitum."

I tre problemi classici della matematica greca - π

Αρχιμήδους κύκλου μέτρησις

ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι οα' μείζων

ergo ambitus circuli triplo maior est diametro et excedit spatio minore quam 1/7, maiore autem quam 10/71

(Archimedes Opera Omnia Leipzig - Teubner, 1910)

Euclide

Euclide

Pochissimo si sa della sua vita: nacque ad Alessandria, visse probabilmente sotto Tolomeo I (367 a. C. - 283 a. C.)

- è menzionato in un brano di Pappo
- di lui si sa quanto ne dice Proclo, che lo colloca tra i discepoli di Platone, più anziano di Archimede e di Eratostene, che erano coetanei

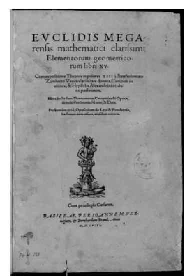
Euclide

- Fu spesso confuso con Euclide di Megara; anche alcune edizioni medievali latine di sue opere portano *Euclides Megarensis* e lo qualificano come filosofo (effettivamente Euclide di Megara fu un filosofo, che visse un secolo prima, fondatore della scuola megarica e discepolo di Socrate). Solo con gli studi di Commandino (1572) fu corretta questa erronea supposizione.

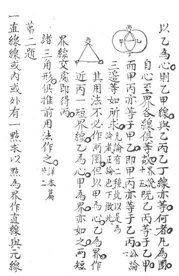
Euclide

- Fu l'autore degli *Elementi*, che non ci sono giunti in originale, ma attraverso una traduzione araba poi tradotta in latino
- fu autore anche di altre opere: *Ottica*, *Coniche*, *Porismi* (riassunti da Pappo), *Fenomeni* (della sfera celeste), due trattati di musica

Euclide - Elementi



Euclide - Elementi

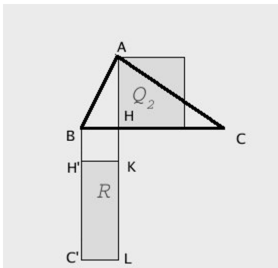


La prima proposizione del Libro I degli *Elementi*
(trad. gesuita Matteo Ricci, sec. XVII)

Euclide - Elementi

- Secondo teor. di Euclide: *il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.*

Euclide - Elementi



Euclide - Elementi

- Altre proprietà dimostrate negli *Elementi*:
- l'algoritmo di scomposizione unica di un numero intero in fattori primi
- un altro metodo per trovare il massimo comune divisore tra due numeri *senza ricorrere* alla scomposizione i fattori primi
- i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri (dimostrato col metodo di esaustione: dei due rapporti nessuno può essere maggiore dell'altro)

Euclide - Elementi

- Tra i postulati della geometria c'è il famoso **V postulato** che viene da Euclide enunciato così:
- *se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minore di due retti le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti*

Dimostrazione per assurdo

Dimostramo per assurdo che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, cioè *non* è n quoziente di numeri interi $\frac{p}{q}$. Ricordiamo che il modo con cui un numero ntero si può scomporre in fattori primi è **unico**. Supponiamo, per assurdo, he la radice di 2 sia un numero razionale; allora esisterebbero due numeri nteri p, q tali che

$$(\frac{p}{q})^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Supponiamo per semplicità che p e q siano primi tra loro; se avessero n fattore comune, semplificheremmo. Allora, se p ha il fattore 2, p^2 ha l fattore 2^2, mentre al secondo membro c'è solo 2^1, dato che q non ha il attore 2 (altrimenti avremmo semplificato), e quindi non ce l'ha neanche q^2. Siamo arrivati ad un assurdo: due numeri che dovrebbero essere uguali hanno scomposizione in fattori primi diversa.