

MASTER 2008-2009 Comunicazione della Scienza

Linguaggi e fondamenti concettuali della matematica

Prof. Carlo Minnaja

minnaja@math.unipd.it

<http://www.math.unipd.it/~minnaja>

Diversità nella quantità

- Non solo l'uomo ha memoria ed immaginazione; anche molti altri animali sono capaci di distinguere il numero, la dimensione, l'ordine e la forma
- Moltissimi animali distinguono l'uno dal più di uno, il due dal "molti"

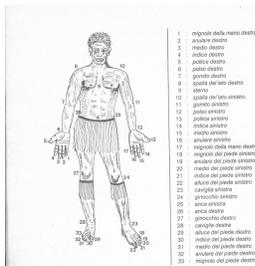
Diversità nella quantità

- La capacità di coordinamento in insiemi di esseri viventi composti di molti elementi rende ragione delle costruzioni di formicai, termitai, dighe fatte dai castori, aggressività di sciami di api o vespe, carica di quadrupedi contro un comune nemico
- sono sopravvissute solo quelle specie che hanno saputo trovare la consapevolezza che il grande numero (oltre che la dimensione corporea e la grande mobilità) è il miglior mezzo di difesa e di autoconservazione

Il contare

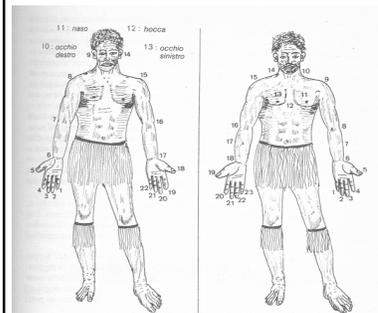
- Parti del corpo per contare:
le dita delle mani, delle mani e dei piedi, altre parti del corpo

Il contare



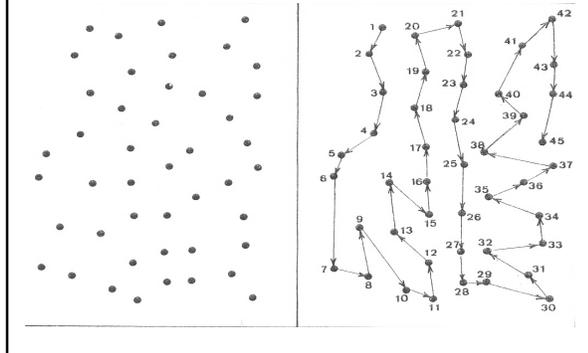
Procedimento numerico corporeale usato da alcune popolazioni delle isole dello stretto di Torres (braccio di mare tra l'Australia e la Nuova Guinea)

Il contare



Procedimento usato nella Nuova Guinea dai Papua (a sinistra) e dagli Elema (a destra)

Il contare



Alcuni animali contano

- Esperimenti con corvi: riescono a “contare” (= distinguere) almeno fino a quattro

La nascita della numerazione

- **Vestonice**: primo esempio di numerazione (25.000-30.000 a.C.) (K. Absalom, 1937): un osso di lupo su cui sono incise tacche con una tacca più profonda ogni cinque: 55 tacche, divise in due serie, la prima di 25 e la seconda di 30, distribuite in gruppi di 5: la **prima numerazione** sembra quindi in base 5

La nascita della numerazione



La nascita della numerazione

- Cumuli di pietre
- Ciò precede la nascita della scrittura e della civiltà conosciuta come tale (produzione di manufatti)

La nascita della numerazione

	1	2	3	4	...
	o	o o	o o o	o o o o	...
MANIFATTI					...
	I	II	III	IIII	...
	•	••	•••	••••	...
	o	o	o	o	...
SCORRENTI					...
	PRIMA	SECONDA	TERZA	QUARTA	...
	1	2	3	4	...

Il principio semplice e il principio attuale di rappresentazione dei numeri interi.

La nascita della numerazione

- Primo sistema di numerazione scritta:
 - **sumero** (3500-3000 a.C.): *misto* con base sessagesimale e decimale
 - *base sessagesimale*: 5x12 (dita di una mano per le lunazioni in un anno)

		
1	10	60
		
600	3600	36000

La nascita della numerazione



$$5 \times 1 + 1 \times 10 + 3 \times 60 + 2 \times 600 = 1395$$

Scrittura del numero 1395 nel sistema sumerico

La nascita della numerazione

- **Occhio di Horus**
- Horus, Horo, scritto Hr (gli egiziani non scrivevano tutte le vocali), divinità egiziana (= colui che sta in alto) rappresentata dal falco
- Secondo il mito più accreditato, Horus era figlio di Osiride e di Iside; lottò contro il fratello Seth e nella lotta perse un occhio

La nascita della numerazione

- Statua di **Horus**, tempio di Edfu, Egitto



La nascita della numerazione

- Horus fu considerato l'unificatore dei due regni dell'Alto e Basso Egitto e il faraone fu considerato la personificazione del dio Horus; vicino al suo nome si trova questo segno (=nome di Horus)



La nascita della numerazione

- Il simbolo di Horus in una stele al Louvre



La nascita della numerazione



L'occhio di Horus fu considerato un potente amuleto, cui vennero attribuiti poteri magici con significati diversi nei vari campi del sapere. In matematica il simbolo fu scomposto in sei parti e ad esse si fecero corrispondere le sei frazioni unitarie più frequenti, quelle corrispondenti agli inversi delle prime sei potenze di 2:



Ad ogni parte dell'occhio si fece corrispondere un senso: 1/2 = olfatto, 1/4 = vista, 1/8 = pensiero, 1/16 = udito, 1/32 = gusto, 1/64 = tatto.

Se si prova a sommare tutti i pezzi, tuttavia, si ottiene 63/64, e non 64/64: manca all'appello 1/64!

La nascita della numerazione

Per esprimere le frazioni, gli egizi si servivano, in genere, del geroglifico della bocca (segno che si leggeva è *R* e che, nel contesto, significava "parte") e lo mettevano sopra il numero facente funzione di denominatore:



Quando il denominatore non poteva venire rappresentato tutto intero sotto il segno della "bocca", scrivevano l'eccedenza di seguito:



La nascita della numerazione

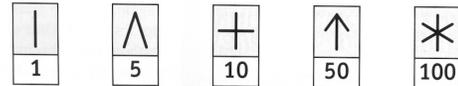
Alcune frazioni, come 1/2, 2/3, e 3/4 erano invece raffigurate con segni speciali:

$$1/2 = \text{simbolo}$$

$$2/3 = \text{simbolo} \text{ ovvero "le due parti"}$$

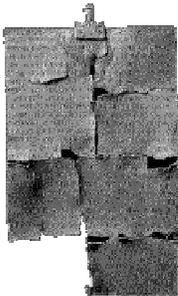
$$3/4 = \text{simbolo} \text{ ovvero "le tre parti"}$$

La nascita della numerazione



- Alcuni simboli della numerazione etrusca

La nascita della numerazione



- Tabula Cortonensis (tavola in bronzo, II sec. a.C. rinvenuta nel 1992)
- Vi sono le parole che indicano numeri:
- Sal (due), sa (sei), sar (dieci), il segno IIII (quattro) e la C rovesciata (metà)

Matematica egiziana

- Gli scribi egiziani erano abbastanza abili a fare di conto, a risolvere problemi di primo e di secondo grado (anche sistemi)
- in vari papiri (Rhind, Mosca, Berlino) si trovano problemi pratici, come dividere un certo numero di pagnotte o come calcolare il volume di solidi

Matematica egiziana

- Papiro **Rhind** (m. 3 x cm. 33)
- Henry Rhind, antiquario scozzese lo acquistò nel 1858 a Luxor
- copiato ca. 1650 a. C. dallo scriba **Ahmes** da un altro papiro 2000-1800 a.C.
- contiene tavole numeriche e 84 problemi aritmetici, algebrici, geometrici

Papiro Rhind



Papiro Rhind



Matematica egiziana Papiro di Berlino

- Papiro di **Berlino**:
- Ti si dice che l'area di un quadrato di 100 cubiti è pari alla somma delle aree di due quadrati più piccoli. Il lato di uno di questi quadrati è $1/2 + 1/4$ del lato dell'altro.
- Fammi sapere le lunghezze di questi lati.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

Matematica egiziana

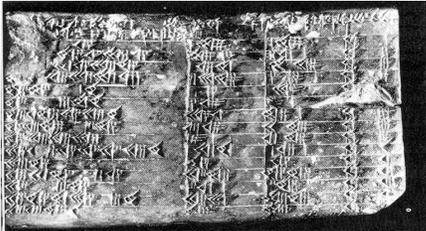
- **Papiro di Mosca** (detto anche "papiro di Goleniscev):
- 25 esempi di calcoli e problemi matematici
- problema 14: *calcolare il volume di un tronco di piramide a base quadrata*
- formula per calcolare la superficie di un emisfero

Matematica babilonese

- Numerazione in base mista 10 e 60
- il 60 ha molti divisori, tra cui il 3 e il 4, mentre il 10 ne ha due soli
- Tabelle di reciproci, in cui vengono saltati i quozienti periodici
- Terne pitagoriche: numeri interi a, b, c tali che

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Matematica babilonese Terne pitagoriche



Terne di numeri interi a, b, c che soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$

Matematica babilonese Terne pitagoriche

- Certamente gli autori di tali tavole conoscevano formule con cui si potevano costruire terne pitagoriche, ad es., dati due interi p e q risultano terne pitagoriche le terne a, b, c così costruite

$$\begin{aligned} a &= p^2 - q^2 \\ b &= 2pq \\ c &= p^2 + q^2 \end{aligned}$$

La matematica presso i Greci

La matematica presso i Greci

ἀγεωμέτρητος μὴ εἰσὶ τῷ
μεθεὶς ἀγεωμέτρικος εἰσὶ τῷ
(Accademia)
ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμετρῖσει
(attribuito da Plutarco a Platone)

La matematica presso i Greci

Nascita della dimostrazione:
gli "elementi" di Ippocrate di
Chio? (circa 450 a.C.) scuola Ionica).

Evoluzione dei significati

μάθημα = scienza, disciplina, studio
μάθησις = apprendimento, cognizione
τὰ μαθηματικά οἱ μαθηματικοὶ
θεῶρημα = spettacolo
ἀπαγωγή = inferire da un luogo ad
un altro
ἀδύνατος = impossibile
ἀπαγωγή εἰς τὸ ἀδύνατον =
= dimostrazione per assurdo

con lo stesso titolo avrà l'opera di
Euclide e dei neoplatonici: στοιχεῖα

Il numero

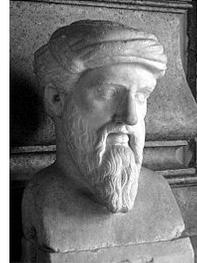
- Prima definizione di numero (**Talete di Mileto**):
numero è un sistema di unità

Talete



- **Talete** (c. 640 a. C. - 547 a. C.): primo filosofo della civiltà occidentale, uno dei sette saggi dell'antichità, osservatore della natura, astronomo, matematico

Pitagora



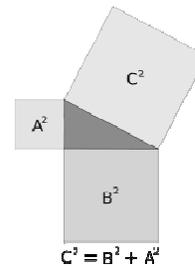
- **Pitagora di Samo**
πειθω = persuado
αγορά = piazza
(ca. 575 - ca. 490)

Pitagora

Pitagora, dopo viaggi in Asia Minore e in Egitto, venne a stabilirsi nella Magna Grecia, a Crotona, una colonia dorica; attorno a lui si raccolse un movimento misticheggiante (purificazione dell'anima)

- prese posizioni politiche e fu avversato dalle autorità costituite
- non lasciò nulla di scritto e vietò ai suoi discepoli di comunicare le scoperte agli estranei

Teorema di Pitagora



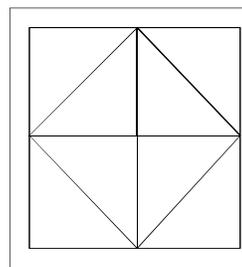
Teorema di Pitagora

- Una gustosa dimostrazione del teorema, nel caso di un triangolo rettangolo *isoscele* si ha in *Menone*, un dialogo di Platone, dove Socrate insegna ad un ragazzo che se a è la lunghezza dei cateti e d quella dell'ipotenusa, risulta

$$2a^2 = d^2$$

(problema della duplicazione del quadrato)

Teorema di Pitagora



- Teor. di Pitagora per il **triangolo rettangolo isoscele**:

se a è il lato e d la diagonale si vede che l'area del quadrato grande è $4a^2$ e quindi l'area del quadrato sull'ipotenusa è

$$d^2 = 2a^2$$

da cui $d = \sqrt{2} a$ (nella notazione odierna)

Teorema di Pitagora

Interviene qui la radice di 2, ma non direttamente, perché Socrate non estrae poi la radice, ma fa un ragionamento geometrico

Teorema di Pitagora (babilonese)

Tavoletta paleobabilonese
(1800-1600 a.C)



Quadrato con due diagonali:
lato del quadrato: 30
sulla diagonale sono scritti
due gruppi di numeri:

$$1;24, 51, 10$$

$$(1+24/60+51/60^2+10/60^3=$$

$$=1,414213 \sim \sqrt{2})$$

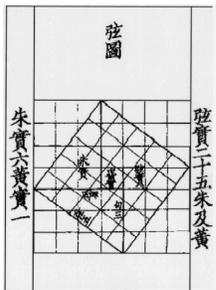
$$42;25, 35$$

$$(42+25/60+35/60^2 =$$

$$=42,42639 \sim 30 \sqrt{2})$$

Teorema di Pitagora (cinese)

Hsuan-thu (1200 a.C. ?)



Triangolo di lati 3, 4, 5
Se si contano i numeri
dei quadretti si nota
che è

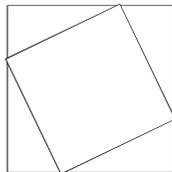
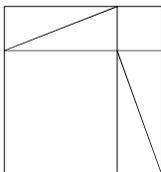
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Teorema di Pitagora (indiano)

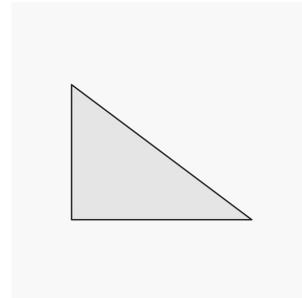
- Una dimostrazione del teorema di Pitagora si trova in un libro indiano, *Lilavati* (il bello), che però fa riferimento ad un *salvasutra* forse dell'800 a.C.
- **Sutra** è un corpo di conoscenze scientifiche o rituali, mentre **salva** è la corda, e il *salvasutra* a cui ci riferiamo riporta numerosi esempi di misurazioni di lunghezze fatte con la corda, tra cui la costruzione di triangoli rettangoli.

Teorema di Pitagora (indiano)

- Dimostrazione: बोध = "guarda"



Teorema di Pitagora



La logica

Aristotele



Aristotele e Platone
(formella di Luca della Robbia
nel campanile di Giotto)

Aristotele

- Studia nell'Accademia fondata da Platone (che allora era in Sicilia e tornerà ad Atene nel 364 a. C.)
- studia dapprima **matematica**, poi **dialettica**
- la scuola di matematica è retta da **Eudosso di Cnido**
- Scrive poi di filosofia, sull'anima

Aristotele

- Aristotele scrisse numerose opere, tra le quali la *Metafisica* e la *Logica*
- vi si trovano dissertazioni di meccanica, fisica, matematica, botanica, psicologia, economia

Aristotele

- Le teorie devono essere basate su un certo numero di proposizioni indimostrabili:
- **nozioni comuni** (*assiomi*), caratteristiche di qualsiasi scienza
- **nozioni specifiche** (*postulati*), che sono caratteristiche della scienza particolare e che fissano il significato dei concetti fondamentali
- il resto va dimostrato

Aristotele - Logica

- Tre **principi logici** fondamentali:
- principio di **identità**: una proposizione è uguale a se stessa

Aristotele - Logica

Principio di **non contraddizione**:

“Non è lecito affermare che qualcosa sia e non sia nello stesso modo ed allo stesso tempo.”

Aristotele, *Metafisica*, 3, 6

principio del **terzo escluso**: tra una proposizione e la sua negazione almeno una è vera

Aristotele - Logica

- Il **sillogismo** come primo esempio di dimostrazione:
- **premessa maggiore** (vi compaiono un *predicato* e un *termine medio*)
- **premessa minore** (vi compaiono un *soggetto* e un *termine medio*)
- **conclusione** (vi compaiono un *soggetto* e un *predicato*)

Aristotele - Logica

- **PM**: tutti gli uomini sono mortali
- **Pm**: tutti gli ateniesi sono uomini
- **Conclusione**: tutti gli ateniesi sono mortali

- La logica aristotelica tratterà anche diversi tipi di sillogismo

Logica

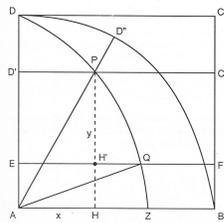
- L'uso di un ragionamento basato sulla logica per dimostrare proprietà matematiche appare soltanto in Aristotele (con alcuni precedenti in Zenone, Anassagora, Platone) e nella matematica indiana
- Dimostrazione *per assurdo*

Problemi classici

I tre problemi classici della matematica greca

- **trisezione dell'angolo**
- **duplicazione del cubo** (problema di Delo)
- **quadratura del cerchio**
che dovevano essere risolti soltanto con la riga (non graduata) e con il compasso, cioè unendo punti con rette e trovando intersezioni tra rette e circonferenze

I tre problemi classici della matematica greca



- **Trisezione dell'angolo**
- Curva **trisettrice**
- **Ippia**, opera ad Atene nella seconda metà del V sec. a. C.)
- Questa curva (*non* tracciabile con riga e compasso) riduce il problema alla trisezione di un segmento (risolubile con riga e compasso)

I tre problemi classici della matematica greca

- **Duplicazione del cubo**

- ovviamente il problema è dato da

$$b^3 = 2a^3$$

cioè b è a per la radice cubica di 2.

- **Ippocrate** dimostrò che la risoluzione di questo problema equivale a studiare l'intersezione tra coniche, due parabole ed una iperbole equilatera (non risolubile con riga e compasso)

I tre problemi classici della matematica greca

- **Duplicazione del cubo**

Archita fornì una soluzione tridimensionale del problema di Delo intersecando un cono, un cilindro e un toro.



I tre problemi classici della matematica greca

- Il risultato ottenuto da Archita appare ancor più straordinario se teniamo conto che egli giunse alla sua soluzione per via sintetica, senza l'uso delle coordinate cartesiane.

I tre problemi classici della matematica greca

- Anche il problema della **quadratura del cerchio** si può risolvere tramite la curva trisettrice di Ippia (chiamata anche, per questo, curva **quadratrice**)

I tre problemi classici della matematica greca - π

$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ formula egizia per l'area del cerchio; se ne ricava $\pi \approx 256/81 \approx 3,1605$

Secundo i babiloniesi: $\pi \approx \frac{25}{8} = 3,125$
 Mille anni dopo, regnum Sabaeae,
 $\pi \approx 3$ (Liber tertius regum, VII, 23)
 v. anche Liber secundus paradipomeni.
 IV, 2) « Fecit quoque mare fonsile
 decem cubitorum a labio usque ad
 labium, rotundum in circumito,
 quinqu cubitorum altitudo ejus,
 et reticula triginta cubitorum
 cingebat illud per circumitum »

I tre problemi classici della matematica greca - π

Αρχιμήδους κύκλου
μέτρῳσις
ἢ ἄρα τοῦ κύκλου περί-
μετρος πῆρ διαμέτρου
πριτλασίῳ ἐστὶ καὶ
ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑξαῶμῳ
μέρει, μείζονι δὲ ἢ
ἑοῦ μείζονι
Anno ambobus circuli circulo
maior est diametro et excedit
spatio minore quam 1/7, ma-
iore autem quam 2/71
(Archimedes Opera Omnia
Leipzig - Teubner, 1910)

Euclide

Euclide



Euclide



Euclide

- Pochissimo si sa della sua vita: nacque ad Alessandria, visse probabilmente sotto Tolomeo I (367 a. C. - 283 a. C.)
- è menzionato in un brano di Pappo
- di lui si sa quanto ne dice Proclo, che lo colloca tra i discepoli di Platone, più anziano di Archimede e di Eratostene, che erano coetanei

Euclide

- Fu spesso confuso con Euclide di Megara; anche alcune edizioni medievali latine di sue opere portano *Euclides Megarensis* e lo qualificano come filosofo (effettivamente Euclide di Megara fu un filosofo, che visse un secolo prima, fondatore della scuola megarica e discepolo di Socrate). Solo con gli studi di Commandino (1572) fu corretta questa erronea supposizione.

Euclide

- Fu l'autore degli *Elementi*, che non ci sono giunti in originale, se non pochi frammenti, ma attraverso una traduzione araba poi tradotta in latino
- fu autore anche di altre opere: *Ottica*, *Coniche*, *Porismi* (corollari o teoremi incompleti, riassunti da Pappo), *Fenomeni* (della sfera celeste), due trattati di musica

Euclide - Elementi



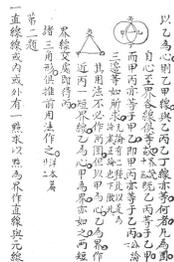
Euclide - Elementi



Euclide - Elementi



Euclide - Elementi



La prima proposizione del Libro I degli *Elementi*
(trad. gesuita Matteo Ricci, sec. XVII)

Euclide - Elementi

- Gli *Elementi* (ca. 300 a. C.) comprendono 13 libri (6 dedicati alla geometria piana, 2 alla teoria dei numeri, 1 alle grandezze incommensurabili, 2 alla geometria solida)
- hanno contributi originali, ma anche sono una sintesi di circa tre secoli di ricerche geometriche

Euclide - Elementi

- Il primo libro riporta 23 termini, che descrivono dei concetti primitivi, ad es.:
- Un **punto** è ciò che non ha parti
- **Linea** è lunghezza senza larghezza
- Estremi di una linea sono punti
- **Linea retta** è quella che giace egualmente rispetto ai suoi punti
- **Superficie** è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza
- Estremi di una superficie sono linee

Euclide - Elementi

- Altre definizioni riguardano:
- *perpendicolare*,
- *angoli (retto, acuto, ottuso)*,
- *figure*,
- *triangoli, quadrilateri (quadrato, rombo, romboide, trapezio)*,
- *rette parallele* (che, prolungate da entrambe le parti, non si incontrano)

Euclide - Elementi

- Ecco alcune delle proprietà dei numeri (naturali):
- **Numero** è una pluralità composta di unità
- un numero (minore) è *parte* di un altro (maggiore) quando *lo misura* (cioè quando è un suo sottomultiplo)

Euclide - Elementi

- Numero **pari** è quello che è divisibile in due parti uguali
- Numero **dispari** è quello che non è divisibile in due parti uguali, ossia quello che differisce di un'unità da un numero pari

Euclide - Elementi

- Numero **primo** è quello che è misurato soltanto dall'unità (attualmente esistono altre definizioni che possono essere più comode)
- Numeri **primi tra loro** sono quelli che sono misurati soltanto dall'unità come misura comune
- numero **composto** è quello che è misurato da qualche numero
- numeri **composti tra loro** sono quelli che hanno un qualche numero come misura comune

Euclide - Elementi

- Un primo numero *moltiplica* un secondo quando si ottiene un terzo numero componendolo con la somma di tante volte il secondo per quante sono le unità del primo (è la definizione di *prodotto*)

Euclide - Elementi

- Quando due numeri, moltiplicandosi tra loro, producono un terzo numero, il prodotto si chiama **numero piano** e i numeri che si moltiplicano tra loro si chiamano suoi **lati**
- Quando tre numeri, moltiplicandosi tra loro, producono un quarto numero, il prodotto si chiama **numero solido** e i numeri che si moltiplicano tra loro si chiamano suoi **lati**

Euclide - Elementi

- Numero **quadrato** è un numero piano che ha per lati due numeri uguali
- Numero **cubo** è un numero solido che ha per lati tre numeri uguali

Euclide - Elementi

- I **numeri primi** sono infiniti
- Se fossero finiti, e il più grande si chiamasse p_k , allora consideriamo il numero

$$N = p_1 p_2 p_3 \dots p_k + 1$$

Questo non sarebbe divisibile per nessun p_i (la divisione avrebbe resto 1), e quindi sarebbe primo a sua volta e maggiore di p_k

(dim. adattata modernamente di quella di Euclide, *Elementi*, libro IX; ne esistono altre)