

**MASTER 2008-2009**  
**Comunicazione della Scienza**

**Linguaggi e fondamenti concettuali della  
matematica**

**Prof. Carlo Minnaja**

[minnaja@math.unipd.it](mailto:minnaja@math.unipd.it)

<http://www.math.unipd.it/~minnaja>

**2<sup>a</sup> settimana**

**Euclide - Elementi**

• **Assiomi di Euclide:**

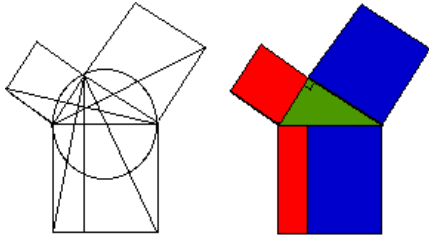
- 1. Tra due punti si può sempre tracciare una retta (che intendeva: *segmento*)
- 2. Una retta (segmento) si può sempre prolungare
- 3. È sempre possibile tracciare una circonferenza di qualsiasi centro e qualsiasi raggio
- 4. Tutti gli angoli retti sono tra loro congruenti
- 5. Data una retta e un punto fuori di essa esiste un'unica retta parallela alla prima e passante per tale punto

**Euclide - Elementi**

• **Nozioni comuni:**

- cose che sono uguali ad un'altra sono uguali tra loro
- cose uguali addizionate (o sottratte) a cose uguali danno risultati uguali
- doppi (e metà) di cose uguali sono uguali
- il tutto è maggiore della parte

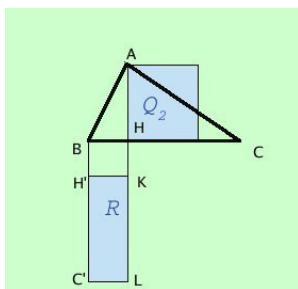
## Euclide - Elementi



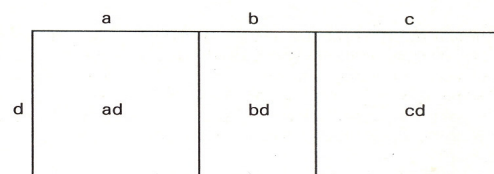
## Euclide - Elementi

- **Secondo teorema** di Euclide
- *Il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.*

## Euclide - Elementi

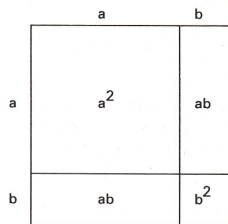


## Euclide - Elementi



Proprietà distributiva:  $(a+b+c)d = ad+bd+cd$

## Euclide - Elementi



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

## Euclide - Elementi

- Altre proprietà dimostrate negli *Elementi*:
- l'algoritmo di scomposizione unica di un numero intero in fattori primi
- i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri (dimostrato col metodo di esaurimento: dei due rapporti nessuno può essere maggiore dell'altro)

## Dimostrazione per assurdo

Dimostriamo per assurdo che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale, cioè *non* è un quoziente di numeri interi  $\frac{p}{q}$ . Ricordiamo che il modo con cui un numero intero si può scomporre in fattori primi è **unico**. Supponiamo, per assurdo, che la radice di 2 sia un numero razionale; allora esisterebbero due numeri interi  $p, q$  tali che

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Supponiamo per semplicità che  $p$  e  $q$  siano primi tra loro; se avessero un fattore comune, semplificherebbero. Allora, se  $p$  ha il fattore 2,  $p^2$  ha il fattore  $2^2$ , mentre al secondo membro c'è solo  $2^1$ , dato che  $q$  non ha il fattore 2 (altrimenti avremmo semplificato), e quindi non ce l'ha neanche  $q^2$ . Siamo arrivati ad un assurdo: due numeri che dovrebbero essere uguali hanno scomposizione in fattori primi diversa.

## Euclide - Ottica

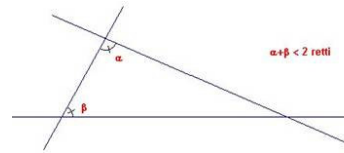
- Euclide scrisse anche altre opere; nell'**Ottica** enuncia alcuni principi fisici:
- i raggi sono rettilinei
- gli oggetti che si vedono sotto angoli uguali sono ritenuti uguali
- Quest'opera ebbe molta influenza sulla scienza medioevale

## Euclide - Elementi

- Tra i postulati della geometria c'è il famoso **V postulato** che viene da Euclide enunciato così:
- *se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minore di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti*

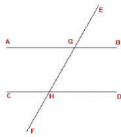
## Euclide - postulati

- Espressione geometrica del V postulato



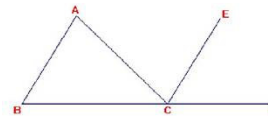
## Euclide - postulati

- Conseguenze del V postulato: gli angoli alterni interni sono uguali, gli angoli corrispondenti sono uguali



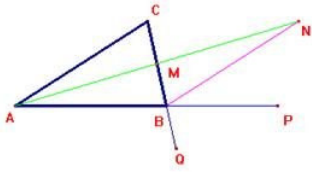
## Euclide - postulati

- La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (le rette BA e CE sono parallele e gli angoli in A e in C sono alterni interni e quindi uguali)



## Euclide - postulati

- Se si prende  $N$  tale che  $MN = AM$ , l'angolo in  $C$  quello  $CBN$  sono uguali ( $AC$  e  $BN$  sono parallele)



## Geometrie non euclidee

## Geometrie non euclidee - Bolyai

- **Janos Bolyai** (1802-1860), ungherese, figlio di Farkas, anch'egli matematico e amico di Gauss; studente eccellente, il migliore schermidore e ballerino dell'esercito ingegnere, ufficiale del Genio, precocemente in pensione



## Geometrie non euclidee - Bolyai

- Ebbe forti contrasti con il padre; ebbe due figli da una donna che non poté sposare subito perché la pensione era troppo esigua; la sposò dopo il 1848 in quanto la legge cambiò perché l'Ungheria aveva acquisito l'indipendenza; dopo due anni i due si lasciarono, e i rapporti di Bolyai con il padre migliorarono.

### **Geometrie non euclidee - Bolyai**

- Morì di polmonite; una università a Cluj, sua città natale ora in Romania fu fondata con il suo nome nel 1945, ma fu chiusa dal regime di Ceausescu nel 1959.

### **Geometrie non euclidee - Bolyai**

- Propose nel 1831 una geometria in cui non era valido il postulato delle parallele; ad una lettera del padre a Gauss, questi rispose che ci aveva già pensato da trent'anni (infatti c'è una sua lettera del 1824 in cui dichiara di aver costruito per proprio diletto una geometria in cui la somma degli angoli di un triangolo è minore di un angolo piatto)

### **Geometrie non euclidee - Bolyai**

- La risposta di Gauss gettò Bolyai in una forte depressione. Quando poi scoprì che il russo Lobacevskij aveva avuto le stesse idee e le aveva già pubblicate nel 1829, la depressione peggiorò e si mise in pensione dall'esercito. Non scrisse più nulla di matematica e provò a costruire una teoria della conoscenza universale.

### **Geometrie non euclidee - Bolyai**

- Nel 1832 ideò una lingua universale basata sull'ungherese.
- Scrisse solo poche pagine, ma lasciò oltre 20.000 pagine di manoscritti.

## Geometrie non euclidee - Lobacevskij



## Geometrie non euclidee - Lobacevskij

- **Nicola Lobacevskij** (1792-1856) ebbe tutta la sua vita nell'università di Kazan, di cui fu anche rettore per 19 anni. Ebbe sette figli, ma cadde in forte depressione per la morte del primogenito: l'importanza delle sue scoperte non fu compresa subito, egli fu di fatto pensionato forzatamente e terminò la sua vita in povertà

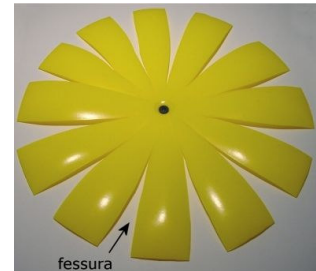
## Geometrie non euclidee

- Superficie sferica



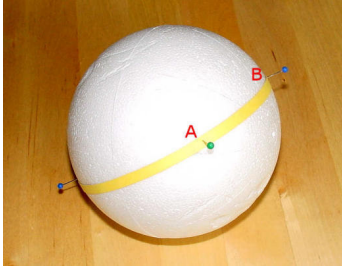
## Geometrie non euclidee

- Una superficie sferica *non* è sviluppabile su un piano senza operare dei tagli



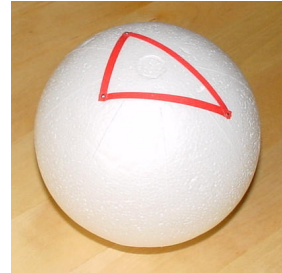
## Geometrie non euclidee

- In una superficie sferica si dice *retta* una circonferenza massima



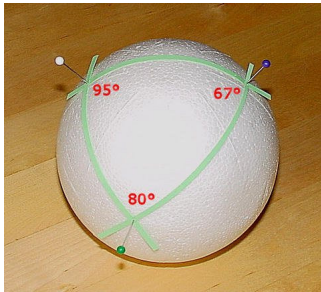
## Geometrie non euclidee

- Triangolo su una superficie sferica, limitato da archi di circonferenza massima



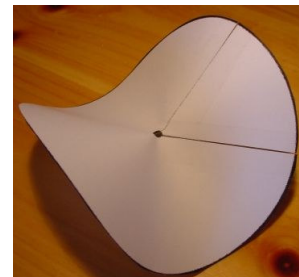
## Geometrie non euclidee

- In una superficie sferica la somma degli angoli di un triangolo è  $>$  di un angolo piatto



## Geometrie non euclidee

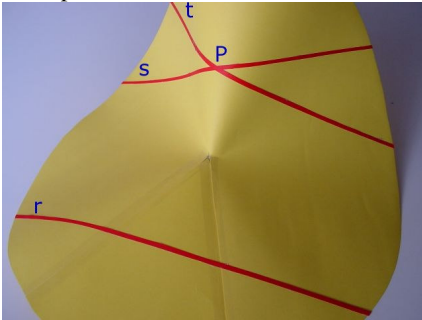
- Si prende una superficie a sella e si chiamano *rette* le intersezioni di tale superficie con un piano





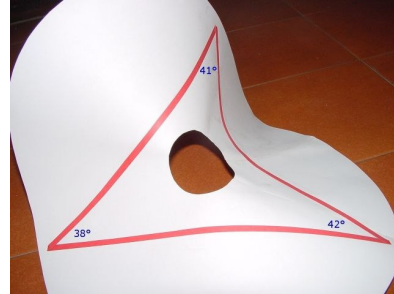
## Geometrie non euclidee

- In una superficie a sella le rette  $t$  ed  $s$  passano entrambe per  $P$  e non incontrano la retta  $r$



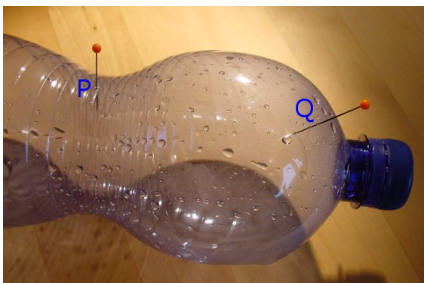
## Geometrie non euclidee

- La somma degli angoli di un triangolo in una superficie a sella è  $<$  un angolo piatto



## Geometrie non euclidee

- Superficie in parte a sella e in parte sferica



## La probabilità

## Scientificità delle congetture

- Scientificità delle congetture nella nascita della **probabilità**:
  - il doppio 6 (*sonnet*)
  - Fermat (1601-1665)
  - Pascal (1623-1669)

## Pierre de Fermat      Blaise Pascal



## Legge dei grandi numeri

- La **legge dei grandi numeri**, detta anche **legge empirica del caso** oppure **teorema di Bernoulli**, descrive il comportamento della media di una sequenza di  $n$  variabili casuali indipendenti e caratterizzate dalla stessa distribuzione di probabilità (ad es.  $n$  lanci della stessa moneta ecc.) al tendere ad infinito della numerosità della sequenza stessa ( $n$ ).

## Legge dei grandi numeri

- Data una successione di variabili casuali  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  indipendenti e identicamente distribuite con media  $\mu$ , si consideri la media calcolata; la legge (forte) dei grandi numeri **afferma** che:
  - la media campionaria (quella misurata) converge *quasi certamente* alla media calcolata delle  $X_i$ .

## Scientificità delle congetture

- Legge dei grandi numeri: diventa piccola la probabilità che si verifichi il contrario
- La legge dei grandi numeri assume a principio certo una incertezza dichiarata
- Definizione empirica di **indipendenza statistica**: problema che si morde la coda.

## Scientificità delle congetture

- La legge dei grandi numeri **giustifica** la **possibilità**, quando si sia effettuato un esperimento costituito da  **$n$  prove identiche ripetute**, di **attribuire** al valore medio dei risultati delle prove il significato di migliore stima del “valore vero” della grandezza in esame.
- **Assunzione di verità per una legge probabilistica teorica**

## Scientificità delle congetture

- Considero una sequenza di informazioni: la nuova informazione non cambia le conoscenze che già avevo in precedenza .
- Esempio:
  - misuro la pressione, e poi scopro che il paziente parla correntemente tre lingue. Cosa cambia?

**Eulero**

## Eulero

- **Leonhard Euler**, o **Eulero** (1707– 1783), il più grande matematico e fisico svizzero di tutti i tempi. Allievo di Giovanni Bernoulli, si è occupato di analisi infinitesimale, geometria, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi e molte altre cose.



## Eulero

- Il padre lo avviò agli studi preparatori per la carriera ecclesiastica, ma, poi, convinto da Giovanni Bernoulli che era stato suo compagno, lasciò che il figlio si indirizzasse alla matematica.
- Eulero si laureò in filosofia, scrisse i primi lavori e arrivò secondo in un concorso dell'Accademia di Parigi su come disporre meglio gli alberi di una nave

## Eulero

- Nel 1727, dopo aver invano concorso alla cattedra di matematica di Basilea, fu indirizzato all'Accademia di S. Pietroburgo come fisiologo, dove lo volle Caterina, moglie di Pietro il Grande. Scrisse allora un lavoro di acustica. A Pietroburgo entrò nella cerchia di Daniele Bernoulli e Jakob Hermann (che aveva insegnato a Padova)

## Eulero

- Nel 1741, dopo un cambio di regime in Russia, accettò di passare all'Accademia di Berlino, ricevendo una parte del suo salario dall'Accademia di Pietroburgo per la quale scriveva libri e lavori scientifici.

## **Eulero**

- A Berlino fu impegnato in molti lavori di direzione del personale, di idraulica, di matematica. Vi restò 25 anni e scrisse circa 380 articoli.
- Non più in buoni rapporti con l'imperatore Federico il Grande di Prussia, che aveva offerto la presidenza dell'Accademia a D'Alembert, tornò in Russia nel 1766.

## **Eulero**

- Peraltro D'Alembert rifiutò la presidenza dell'Accademia di Berlino e il trasferimento da Parigi ritenendo non opportuno per sé un posto di livello superiore a quello di Eulero

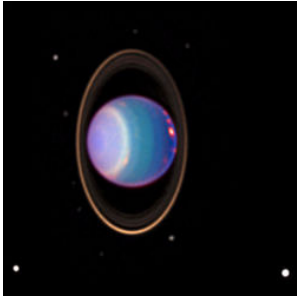
## **Eulero**

- Poco dopo divenne cieco, prima da un occhio e poi anche dall'altro, ma continuò a scrivere decine di articoli, aiutato da due dei numerosissimi figli (uno era professore di fisica, l'altro era nella carriera militare). La cecità gli stimolò enormemente la capacità di calcolo mentale

## **Eulero**

- In un pomeriggio del settembre 1793, dopo aver dato lezione di matematica ai nipoti ed aver discusso della scoperta di Urano fatta da Herschel nel 1781, si accasciò, disse "Muio", e morì di un'emorragia cerebrale.

## Eulero

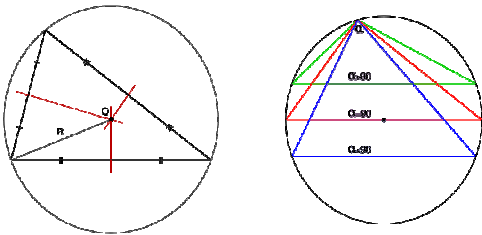


- Di Urano sono stati scoperti due zone di anelli e una trentina di satelliti. Nel 2007 l'asse di rotazione di Urano ha raggiunto la direzione parallela all'eclittica

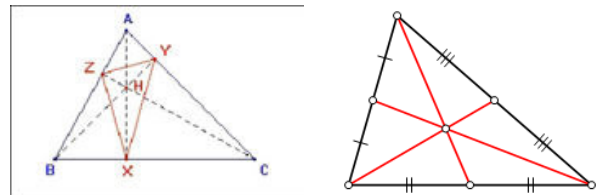
## Eulero

- Moltissime formule, teoremi, elementi di geometria sono collegati al suo nome: retta di Eulero (è la retta passante per l'ortocentro, il baricentro e il circocentro di un triangolo), diagramma di Eulero-Venn, metodi di Eulero (risoluzione delle equazioni di 4° grado, e di equazioni differenziali), formule di Eulero, ...

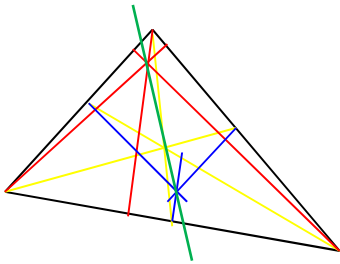
## Circocentro (assi)



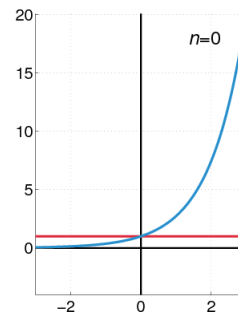
## Ortocentro (altezze) Baricentro (mediane)



## Retta di Eulero



## Approssimazione di $e^x$



- Approssimazione di  $e^x$  tramite la serie di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

## Eulero

Eulero istituì anche la relazione

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

dalla quale si ricavano le *formule di Eulero*:

$$\sin \theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i} \quad \cos \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2}$$

Per  $\theta = \pi$  si ha:

$$e^{i\pi} = -1$$

## Eulero

- La questione del logaritmo dei numeri negativi è così definitivamente risolta:

le due funzioni

$$\lg x^2 \quad \text{e} \quad 2 \lg x$$

*non* sono uguali perché sono definite su due insiemi diversi; i loro valori coincidono sul semiasse dei reali positivi, dove esistono entrambe

## Eulero

- Per una funzione di variabile complessa  
 $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \quad (w = f(z))$   
non ha senso il concetto di crescita; per la funzione esponenziale nel corpo complesso la proprietà corrispondente alla positività tra i reali è la diversità da 0 (e quindi il logaritmo di 0 non esiste nemmeno in  $\mathbf{C}$ )

## Eulero

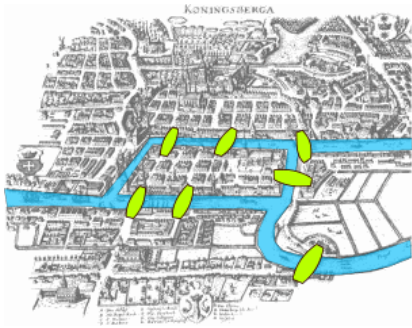
- Con Eulero si ha la sistemazione quasi definitiva delle funzioni elementari di variabile complessa.
- Con Eulero nasce anche una nuova branca della matematica: la topologia

## Topologia

- ## Topologia
- La **topologia** è lo studio delle proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza strappi, sovrapposizioni o incollature



## Topologia: i ponti di Königsberg



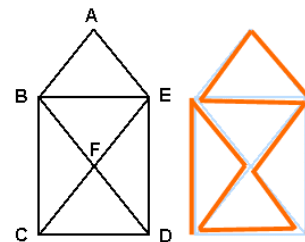
## Topologia: i ponti di Königsberg



## I ponti di Königsberg

- E' possibile fare una passeggiata attraversando esattamente una sola volta tutti i ponti?
- Eulero ricondusse il problema ad un problema di teoria dei grafi e trovò la soluzione. Nel caso dei ponti di Königsberg la risposta alla domanda è negativa

## Senza staccare la penna



## Topologia: indice topologico

- Trasformazione di una tazza da caffè in un toro (stesso indice topologico)



## Topologia: indice topologico

