MASTER 2008-2009
Comunicazione della Scienza

Linguaggi e fondamenti concettuali della matematica

Prof. Carlo Minnaja

minnaja@math.unipd.it

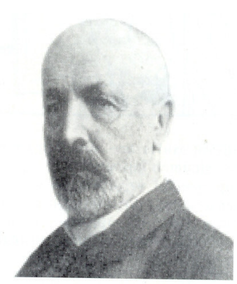
http://www.math.unipd.it/~minnaja

3ª settimana

I principi ai tempi di Cantor

Cantor

- **Georg Ferdinand Ludwig Cantor** (1845-1918).
- I principi ai tempi di Cantor: la nascita della **teoria degli insiemi**.



Cantor

I principi ai tempi di Cantor

- Dimostrò la **numerabilità dei razionali** e pose il problema dell'**ordine di infinito dei reali** (ipotesi del continuo).
- A lui si devono studi sulla continuità assoluta (**funzione di Cantor**) e su insiemi di misura nulla, eppure con la potenza del continuo (**insieme di Cantor**)

Dall'infinito al "molto lontano"

- Sull'infinito, la sua relazione con la divinità, la possibilità di concepirlo "in potenza" o "in atto" si sono espressi più i filosofi che i matematici.
- Tuttavia procedimenti "all'infinito" si trovano in Archimede, Zenone, Democrito

Ipotesi del continuo

- *Ipotesi del continuo*:
- Non esistono numeri cardinali compresi tra la potenza dei naturali $\aleph_0$ e quella dei reali, che è $2^{\aleph_0}$.
- Cantor cercò a lungo di dimostrarlo, ma poi prese a pensare che fosse falsa.
- *Ipotesi generalizzata del continuo*:
- Data una cardinalità T non esiste nessuna cardinalità compresa tra **T** e 2^T

Ipotesi del continuo

- Nell'ultimo decennio c'è stato ancora interesse per queste congetture, con una tendenza a confutarle, dimostrando che la loro accettazione avrebbe contraddetto altre congetture che apparivano maggiormente "evidenti"

Strategie

- Strategia nel dimostrare una congettura: proporne una più generale, dimostrare quest'ultima, e da questo concludere che anche la congettura particolare è dimostrata.
- Potrebbe succedere che il caso generale sia dimostrabile più facilmente.
- Si è tentato di dimostrare l'ipotesi generalizzata del continuo (senza riuscirvi)

I dubbi e il vero

Il secolo dei dubbi

- I **dubbi** sugli insiemi:
  - si possono fare calcoli e considerazioni su enti di cui non si sa se esistono e di cui non si conoscono le proprietà?
  - quali conclusioni si possono considerare vere?

Il "vero" all'università di Padova

- DISCORSO INAUGURALE

dell'anno accademico 1905-906

- LETTO NELL'AULA MAGNA DELL'UNIVERSITÀ

il 6 novembre 1905

- *dal Professore ordinario di Geometria analitica*

SENATORE GIUSEPPE VERONESE

In quest'aula, che religiosamente custodisce le g1orie secolari della università nostra, donde intorno a noi si libra lo spirito del Galilei, che fondò la filosofia della Natura sull'osservazione e sull'esperienza, cercando nelle discipline matematiche il principale strumento delle sue ricerche; in quest'aula, ove per costante tradizione di anno in anno uno dei colleghi è chiamato a rendere omaggio alla scienza, che d'ora in ora accresce la comune dottrina, eleva lo spirito e contribuisce allo svolgimento ordinato e al benessere dell'umanità, io cultore di una scienza, che ebbe qui insigni maestri, mi sento trepidante dinanzi alla maestà della storia di questa nobile scuola nel parlare a Voi intorno al vero nella matematica, alla certezza che è in esso e al suo valore nella scienza pura e nella scienza applicata. Se le mie argomentazioni non possono far vibrare in quest'ora solenne le corde del sentimento e del consenso delle anime vostre, tuttavia compiendo un dovere, oso sperare, signore e signori, nella vostra benevola cortesia.

Galileo disse che la Natura è un libro scritto in lingua matematica. Dove è ordine e misura la matematica può infatti entrare da matrona, e anche quando non è tale, dirige la costruzione degli istrumenti di precisione, che servono sempre alle scienze sperimentali, o delle macchine che servono all'industria; così che Napoleone I affermava, che dal progresso delle matematiche dipende la prosperità della nazione.

…………

Ed è pur noto che la matematica si presta volentieri a spiegare certi giuochi ricreativi, ed è una buona medicina contro la passione del giuoco del lotto.

Il “vero”

- Per Veronese la matematica dà delle conclusioni vere, date le premesse.
- La fiducia nella certezza è assoluta.

Hilbert e i problemi del secolo

Hilbert

- **David Hilbert** (1862 - 1943) fu uno dei più eminenti matematici a cavallo tra il XIX e il XX secolo.

Hilbert

Hilbert

- Il lavoro *Fondamenti di geometria* (1899) sostituisce agli assiomi di Euclide un insieme formale, composto di 21 assiomi, che evita le contraddizioni derivanti da quello di Euclide.
- Non descrive, ma costruisce.

Hilbert

- Con questo lavoro, Hilbert dà il via alla **scuola formalista**, una delle tre scuole della matematica del primo 1900. Secondo il formalismo, la matematica è un gioco privo di significato in cui si gioca con contrassegni privi di significato secondo regole formali concordate in partenza. Essa è quindi un'attività autonoma del pensiero.

Hilbert

- Dopo aver risolto i problemi dei fondamenti della geometria, Hilbert si accinge a fare lo stesso con la matematica in genere. Riconoscendo comunque l'impresa superiore alle sue sole forze, prepara una lezione dal titolo "**I problemi della matematica**" per il *Secondo Congresso Internazionale di Matematica*.

I “problemi del secolo” di Hilbert

- Il discorso venne pronunciato a Parigi durante il Congresso, dove Hilbert introdusse 23 problemi da risolversi nel secolo che si apriva: alcuni furono risolti in breve termine, ma altri sono tuttora irrisolti.

I “problemi del secolo” di Hilbert

- Eccone l'introduzione:

  Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo dietro cui si nasconde il futuro; di gettare uno sguardo ai prossimi sviluppi della nostra scienza e ai segreti del suo sviluppo nei secoli a venire?

I “problemi del secolo” di Hilbert

- Dei 23 problemi (solo 10 presentati effettivamente, gli altri vennero aggiunti in seguito), 9 sono stati risolti, con soluzione accettata da tutti; 8 sono stati risolti (parzialmente), ma la soluzione non è accettata da tutti; 4 dichiarati troppo vaghi; 2 sono rimasti aperti

Assiomatizzazione della matematica

- Il suo tentativo di assiomatizzazione della matematica era destinato a fallire: nel 1931 Gödel dimostrò come un sistema formale che non fosse contraddittorio non potesse dimostrare la sua completezza. Tuttavia nulla si può dire riguardo la dimostrazione da parte di un differente sistema formale sulla completezza della matematica.

Gli allievi di Hilbert

- Hilbert istituì una buona scuola intorno a sé; tra i suoi studenti vi furono **Hermann Weyl** (1885-1955), il campione di scacchi **Emanuel Lasker** (1868-1941) e **Ernst Zermelo** (1871-1953).
- **John Von Neumann** (1903-1957) fu suo assistente.

Zermelo e l'assioma della scelta

Zermelo

- **Ernst Zermelo** (1871-1953) si occupò dei fondamenti della teoria degli insiemi. E' sua la formulazione dell'assioma della scelta (1904)

Zermelo

- Assioma della scelta (formulazione intuitiva):
- *dati infiniti sacchi ciascuno con infiniti fagioli è possibile fare la minestra di fagioli prendendo un fagiolo da ogni sacco*
- Assunto l'assioma della scelta, Zermelo ne dimostrò l'equivalenza con l'ipotesi del buon ordinamento

Assioma della scelta

- L'assioma della scelta è una congettura?
- Nel 1940 Gödel dimostra che se è coerente il sistema di Zermelo-Fraenkel privato dell'assioma della scelta, lo è anche se tale assioma vi viene aggiunto, e quindi tale assioma non può essere confutato

Assioma della scelta

- Del pari l'ipotesi del continuo è coerente con il sistema ZF sia che questo comprenda l'assioma della scelta sia che non lo comprenda

Assioma della scelta

- Nel 1963 Cohen dimostra che sia l'ipotesi del continuo che l'assioma della scelta sono indipendenti dagli altri assiomi del sistema ZF
- Queste congetture quindi cessano di essere teoremi da dimostrare ma diventano caratteristiche di sistemi che regolano la teoria degli insiemi

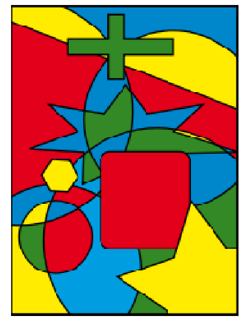
Il problema dei quattro colori

Il problema dei quattro colori

- Il **teorema dei quattro colori** è un teorema che afferma che data una superficie piana divisa in regioni *connesse*, come ad esempio una carta geografica politica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore. Due regioni sono dette *adiacenti* se hanno almeno un segmento di confine in comune

Il problema dei quattro colori

- È immediato trovare mappe per le quali tre soli colori non sono sufficienti. Non è eccessivamente difficile dimostrare che ne bastano al più cinque



Il problema dei quattro colori

- Tuttavia dimostrare che ne siano sufficienti quattro è particolarmente complesso, tanto che la dimostrazione di questo teorema ha richiesto, tra l'altro, un estensivo ricorso al computer, per una delle prime volte nella storia della matematica.

Il problema dei quattro colori

- La congettura venne presentata per la prima volta nel 1852, quando Francis Guthrie, uno studente di Augustus De Morgan, si accorse che per colorare una mappa delle contee britanniche erano sufficienti quattro colori.
- La prima, acclamata "dimostrazione", a lungo riconosciuta come definitiva, fu formulata nel 1879 da Alfred Kempe.

Il problema dei quattro colori

- Nel 1880 Peter Tait annunciò di avere trovato una ulteriore dimostrazione del teorema. Nel 1890 Percy Heawood scoprì l'errore che minava la dimostrazione di Kempe, ben undici anni dopo la sua formulazione; l'anno successivo, ad opera di Julius Petersen, anche la dimostrazione di Tait fu riconosciuta errata.

Il problema dei quattro colori

- La definitiva dimostrazione del teorema per quattro soli colori è stata fornita nel 1977 da parte di Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois, grazie a un complesso algoritmo informatico.

Il problema dei quattro colori

- La dimostrazione si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1.936 configurazioni (poi ulteriormente ridotte a 1.476), per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso dal computer.

Il problema dei quattro colori

- Qualsiasi mappa può infatti essere ricondotta a un numero finito, sebbene assai elevato, di topologie "notevoli" tramite operazioni che modificano le relative posizioni delle regioni che la costituiscono, ma non le proprietà topologiche della mappa stessa.

Il problema dei quattro colori

- Per ridurre al minimo la possibilità di errore, il programma fu eseguito su due diverse macchine con due algoritmi indipendenti; per completare l'analisi di tutti i casi possibili fu necessario far lavorare i computer per moltissime ore. Alla fine, servirono più di 500 pagine per trascrivere a mano tutte le verifiche che costituivano la dimostrazione.

Il problema dei quattro colori

- Il rivoluzionario utilizzo di algoritmi informatici per verificare l'esattezza della congettura scatenò grandi polemiche sull'affidabilità di questi metodi. Il fatto che la dimostrazione fosse basata sull'analisi di una moltitudine di casi discreti portò alcuni matematici a contestarne l'effettiva validità:

Il problema dei quattro colori

- sia per l'impraticabilità di una verifica manuale di tutti i casi possibili, sia per l'impossibilità di avere la certezza che l'algoritmo fosse implementato correttamente.
- La logica e la teoria dell'informazione ci dicono infatti che non è possibile dimostrare sempre la correttezza di un algoritmo, ma tuttavia sono sufficienti semplici controprove per dimostrarne la non correttezza.

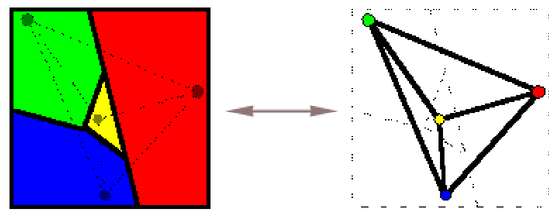
Il problema dei quattro colori

- Il problema di quattro colori pone il problema della validità di una risoluzione al calcolatore
- Ad ogni modo, nonostante le accuse di scarsa "eleganza", nell'algoritmo non è stato trovato nessun errore (finora).

Il problema dei quattro colori

- Nel 2000 Ashay Dharwadker ha proposto una nuova dimostrazione del teorema che richiede l'utilizzo della teoria dei gruppi.
- Un’altra dimostrazione si ha utilizzando la teoria dei grafi

Il problema dei quattro colori



L’ultimo teorema di Fermat

L’ultimo teorema di Fermat

- Fermat aveva scritto (1637) di aver concepito una dimostrazione del seguente teorema:
- non esistono numeri interi *a, b, c* tali che
  - $a^n + b^n = c^n$

  per nessun $n > 2$.

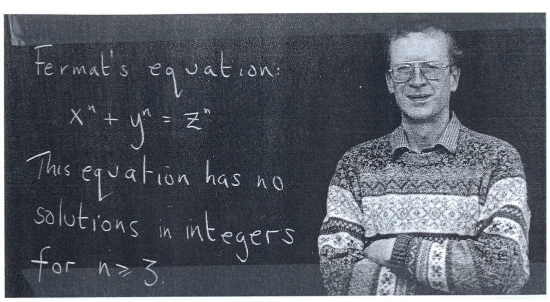
L'ultimo teorema di Fermat

- *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratorum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos euisdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet*

L'ultimo teorema di Fermat

- Il teorema si riduce a dover essere dimostrato nei casi in cui sia $n = 4$ e n sia uguale a un numero primo.
- Per $n = 4$ fu dimostrato da Fermat stesso
- Per $n = 3$ fu dimostrato da Eulero
- Per $n = 5$ fu dimostrato da Legendre
- Per n qualunque è stato dimostrato da Andrew Wiles (1995)

L'ultimo teorema di Fermat



L'ultimo teorema di Fermat

L’ultimo teorema di Fermat

- Fu dapprima dimostrata (da Ribet) una congettura (di Frey) secondo la quale ogni contro-esempio $a^n + b^n = c^n$ all'ultimo teorema di Fermat avrebbe prodotto una curva ellittica del tipo

$$y^2 = x(x-a^n)(x+b^n)$$

- che sarebbe stata un contro-esempio alla congettura di Taniyama-Shimura.

L’ultimo teorema di Fermat

- Quest'ultima congettura propone un collegamento fra le curve ellittiche e le forme modulari
- Un caso speciale della congettura di Taniyama-Shimura era sufficiente per escludere tali contro-esempi

I problemi del terzo millennio

I problemi del terzo millennio

- Ne sono stati formulati sette.
- Uno avanza dai problemi di Hilbert: *la congettura di Riemann*
- Un altro ha una provenienza antica (1742), ma è stato posto successivamente come problema del millennio (nella sua riformulazione di Eulero): *la congettura di Goldbach*

I problemi del terzo millennio

- **Congettura di Riemann**:
- data la funzione di Riemann

$$\zeta(s) = \Sigma_1 \, 1/n^s$$

definita per tutti gli s complessi diversi da 1, i suoi zeri non banali hanno tutti parte reale uguale a ½

(quelli banali sono per z = -2, -4, -6, …)

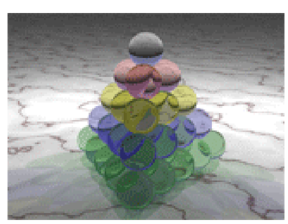
La congettura di Goldbach

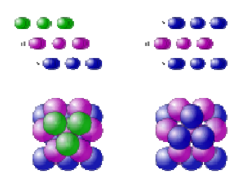
- Ogni numero pari >2 può essere scritto come somma di due primi (1 non viene considerato primo)
- Attualmente la congettura è stata verifica fino a 12 x 10^{17} (fino a settembre scorso); il programma di calcolo non è dei più semplici

Il miglior impacchettamento

- Uno dei problemi si scarica sulla dimostrazione di una congettura: quale è la migliore disposizione di sfere di un certo diametro fissato che riempie maggiormente lo spazio di una piramide?
- Lasciandole cadere dal vertice della piramide, sperimentalmente non si è riusciti a superare il 65%.

Il miglior impacchettamento





Il miglior impacchettamento

- Keplero dimostra (1611) che una disposizione a strati secondo una regolarità esagonale o cubica riempie al 74% ($\pi/\sqrt{18}$).
- Keplero congettura che nessun'altra disposizione sia più densa.

Il miglior impacchettamento

- La congettura è stata dimostrata da Gauss (1831) per qualsiasi distribuzione regolare, ma non per una distribuzione qualsiasi.
- Il passo successivo sarebbe stato il ridurre tutte le distribuzioni irregolari ad un numero finito, e calcolare singolarmente quelle.

Il miglior impacchettamento

- Il problema è rimasto stagnante per oltre un secolo e mezzo.
- Nel 1998 Thomas Hales ha annunciato di possedere una dimostrazione della congettura di Keplero. La sua dimostrazione è fatta per esaustione e prevede di controllare molti casi singoli mediante calcoli al computer.

Il miglior impacchettamento

- I *referee*, dopo aver studiato l'articolo nell'arco di quattro anni, hanno dichiarato di essere certi "al 99%" della correttezza della dimostrazione di Hales. Dunque la congettura di Keplero è molto vicina ad essere considerata un teorema.

Il miglior impacchettamento

- Nel gennaio del 2003 Hales ha annunciato l'inizio di un progetto di collaborazione avente lo scopo di produrre una dimostrazione formale completa della congettura di Keplero. Lo scopo è quello di rimuovere qualsiasi incertezza residua sulla validità della dimostrazione creando una dimostrazione formale che possa essere verificata da programmi di controllo automatico di dimostrazioni come HOL theorem prover.

HOL theorem prover

- HOL (Higher Order Logic) **theorem prover** è una famiglia di sistemi di dimostrazione interattiva di teoremi elaborata da varie università.
- Nata a Cambridge nel 1988 è giunta nel 2008 alla quarta versione (HOL 4), elaborata principalmente dalle università di Cambridge e dello Utah

Il miglior impacchettamento

- Il progetto lanciato da Hales è chiamato *Project FlysPecK*, dove le lettere F, P e K sono le iniziali delle parole che compongono la frase *Formal Proof of Kepler* (dimostrazione formale di Keplero).
- Hales ha stimato che serviranno circa 20 anni di lavoro per produrre una dimostrazione formale completa.

Il XX secolo

- **Tre certezze perdute**.
- La **relatività** elimina lo spazio e tempo assoluti della fisica newtoniana e kantiana
- La **teoria quantistica** elimina il sogno newtoniano di un processo di misurazione controllabile
- Il **caos** elimina la fantasia laplaciana della prevedibilità deterministica

La relatività

- Le scoperte di Galileo e Newton portavano a negare l'esistenza di uno spazio assoluto. Il principio di inerzia e di relavità galieliana del moto introducevano la nozione di uno spazio che dipende dall'osservatore, ossia dalla scelta del sistema di riferimento.

La relatività

- Newton rigettò l'idea di un'esistenza di uno spazio relativo, pur derivante dalle sue scoperte. Esso era in contraddizione con le convinzioni che Newton espresse nei suoi numerosi scritti di teologia.
- L'esistenza di un tempo assoluto era invece ancora compatibile con la teoria di Galilei e Newton, e fu rimossa con la relatività ristretta.

La relatività

- Primo postulato (principio di relatività): tutte le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
- Secondo postulato (invarianza della luce): la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore o dalla velocità della sorgente di luce.

La relatività

- Il secondo postulato generalizza l'osservazione che tutte le oscillazioni meccaniche (onde acustiche, onde sull'acqua, onde su una corda) si propagano con una velocità che dipende solamente dalle caratteristiche del mezzo che le supporta e non dalla velocità con cui la sorgente dell'eccitazione si muove rispetto a tale mezzo.

La relatività

- **Contrazione delle lunghezze** La lunghezza *L* di un corpo in movimento non è invariante, ma subisce una *contrazione* nella direzione del moto, data dalla formula
  $$L = L_0 (1 - \beta^2)^{1/2}$$
  con $\beta^2 = v^2 / c^2$ (dove v è la velocità del corpo e c è la velocità della luce).
- La lunghezza massima del corpo L_0 è misurata nel sistema in cui il corpo è in quiete e viene chiamata *lunghezza propria*.

La relatività

- **Dilatazione dei tempi** L'intervallo di tempo Δt tra due eventi non è invariante, ma subisce una dilatazione se misurato da un orologio in moto rispetto agli eventi. Tale dilatazione è data dalla formula
  $$\Delta t = \Delta t_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}$$
- La durata minima dell'intervallo di tempo è misurata da un orologio solidale con gli eventi; tale intervallo Δt_0 viene chiamato *tempo proprio*.

La relatività

- Alle alte velocità (*v* sempre più prossimo a alla velocità della luce *c*), la contrazione spaziale tende allo zero, mentre la dilatazione temporale tende all'infinito. Ciò equivale ad affermare che alla velocità della luce il tempo "non passa".

La relatività

- La contrazione delle lunghezze non deve essere vista come se il metro variasse la sua dimensione o come se l'orologio segnasse un tempo diverso. Le misure infatti saranno differenti solo se effettuate da un altro osservatore in moto relativo: la lunghezza del proprio metro e la durata del proprio minuto è la stessa per tutti gli osservatori.

La relatività

- La teoria della relatività speciale è oggi universalmente accettata. Gli effetti sulle lunghezze e sugli intervalli di tempo sono normalmente osservati sia in natura che nei laboratori dove particelle elementari sono accelerate a velocità vicine a quelle della luce.

La relatività

- Una prima conferma provenne dalla maggiore vita media dei *pioni* o dei *muoni* generati dai raggi cosmici nell'alta atmosfera terrestre: questi pioni e muoni vivono solo per circa 2 milionesimi di secondo, poi si trasformano in altre particelle.

La relatività

- Muovendosi al 99% della velocità della luce, la distanza che dovrebbero percorrere si può calcolare in 300.000×0.99×2 milionesimi = 0.6 km. Quindi, percorrendo solo 600 metri, dovrebbero decadere prima di arrivare sulla superficie della terra.

La relatività

- Nella realtà essi arrivano fino al livello del mare, cosa che viene interpretata come un aumento della loro vita media a causa dell'alta velocità: rispetto ad un osservatore sulla superficie terrestre, la loro vita si allunga (perché il loro tempo scorre più lentamente), e sono quindi in grado di percorrere distanze più grandi di quelle attese.

Il principio di indeterminazione

- In meccanica quantistica le particelle hanno alcune proprietà tipiche delle onde, non sono quindi oggetti puntiformi, e **non possiedono** una ben definita coppia *posizione* e *momento* (Heisenberg, 1927).

Il principio di indeterminazione

- Il mondo del determinismo causale dovrebbe cedere il passo a quello dell'‘indeterminismo e del caso. Infatti, l'impossibilità di misurare con precisione simultaneamente due grandezze, salvo che siano compatibili, equivale all'impossibilità di verificare il nesso causale fra due generiche quantità.

Il principio di indeterminazione

- Il principio di indeterminazione poneva fine al determinismo così come lo aveva teorizzato in origine Newton e rielaborato in tempi più recenti da Laplace. Per Newton era sufficiente conoscere posizione e velocità di un corpo per poter calcolare con le leggi della fisica classica tutti i suoi stati presenti e futuri.

L’effetto farfalla

L’effetto farfalla

- "Può il batter d'ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?" fu il titolo di una conferenza tenuta da Lorenz nel 1979.
- *Sliding doors* (1997)

L’effetto farfalla

- Edward Lorenz fu il primo ad analizzare l'effetto farfalla in uno scritto del 1963 preparato per la New York Academy of Sciences. Secondo tale documento, "Un meteorologo fece notare che se le teorie erano corrette, un battito delle ali di un gabbiano sarebbe stato sufficiente ad alterare il corso del clima per sempre."

L’effetto farfalla

- Alan Turing in un saggio del 1950, *Macchine calcolatrici ed intelligenza*, anticipava questo concetto: *"Lo spostamento di un singolo elettrone per un miliardesimo di centimetro, a un momento dato, potrebbe significare la differenza tra due avvenimenti molto diversi, come l'uccisione di un uomo un anno dopo, a causa di una valanga, o la sua salvezza"*.