31.5.2005-1.6.2005

martedì - 2 ore

Introduzione alle equazioni differenziali.
Def. - Una equazione differenziale è un legame tra una funzione $x(t)$ di una variabile indipendente t e le sue derivate fino ad un certo ordine.

Esempio:

$$(*)\ f(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0$$

è un'equazione differenziale. Notiamo che la f è una funzione di $n+1$ variabili.

Def. - Si dice *ordine di una equazione differenziale* l'ordine massimo delle derivate che vi compaiono.
La (*) è un'equazione differenziale di ordine n.

Richiamo di cose già viste in Matematica 1:
data una funzione $x = f(t)$ definita su un certo intervallo I, si dice sua *primitiva* una funzione continua e derivabile in I la cui derivata coincide su I con la $f(t)$.

Data una $f(t)$ generalmente continua in un intervallo $[a, b]$ si dice *funzione integrale* la funzione così definita

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Il *teorema fondamentale del calcolo integrale* dice che

$$F'(x) = f(x)$$

e quindi che la funzione integrale è una primitiva della f.

Corollario: Se $G(x)$ è una qualsiasi primitiva di una funzione continua f,vale la relazione

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\ dt$$

(in particolare vale per $G(x) = F(x)$).
Problema già affrontato:
Data $f(t)$ trovare una sua primitiva.
(metodi vari di integrazione: per scomposizione, per parti, per sostituzione)

Def. - Un'eq. diff. si dice in *forma normale* se è esplicitata rispetto alla derivata di grado massimo che vi compare.

$$(**) x''' = g(t, x', x'')$$

è un'eq. diff. del 3^o ordine in forma normale.

L'equazione

$$t^2 x'' - \sin x' \cdot t^3 + \cos |t| = 0$$

è del 2^o ordine; non è in forma normale, ma dove è $t \neq 0$ si può mettere in forma normale così:

$$x'' = \frac{\sin x' \cdot t^3 - \cos |t|}{t^2}$$

Invece

$$(***)\ \lg x'' \cdot (x'')^2 - \cos x' + x - \arctan t = 0$$

è del 2^o ordine, non è in forma normale, e non lo diventa neanche con manipolazioni.

Def. - Si dice *soluzione* della (*) in un certo intervallo I una funzione $x(t)$ tale che sostituita con le sue derivate nella (*) renda il primo membro uguale a 0 per tutti i $t \in I$:

$$f(t, x(t), x'(t), x''(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

Notiamo che qui la f è una funzione della sola variabile t, composta tramite le funzioni $x(t),\ x'(t),\ x''(t),\ ...,\ x^{(n)}(t)$. .

Possono esserci più soluzioni, una sola, nessuna.

Problema di Cauchy: equazione differenziale di ordine n con in aggiunta le n condizioni $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ ....,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

Teor. - Se la f è continua insieme alle sue derivate parziali fatte rispetto alla sue variabili $x,\ x',\ x'',\ ...\ , x^{(n-1)}$ allora esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy.

Attenzione: posso solo dire che questa soluzione esiste in un intorno del punto t_0 ma non posso dire a priori quanto sia grande questo intorno.

Consideriamo l'equazione
$x'(t) = x(t)$
Le sue soluzioni sono del tipo $x(t) = k\ e^t$. Problema di Cauchy e sua soluzione particolare nel caso dell'equazione precedente.

Soluzioni di alcuni casi particolari di problemi di Cauchy.

mercoledì - 4 ore

Equazioni a variabili separabili (già messe in forma normale):

$$y' = y^\alpha$$

con i vari tipi di α, positivo, =1, =0, negativo. Fatto esplicitamente per $\alpha = \frac{2}{3}$.

Dato per casa da risolvere il caso per $\alpha = -\frac{1}{3}$

Consideriamo adesso $x'(t) = xt$
Intanto $x = 0$ è soluzione. Per $x \neq 0$: Si pone $x' = \frac{dx}{dt}$ da cui si ottiene, moltiplicando *come se* si trattasse di denominatori di un rapporto,

$$\frac{dx}{x} = t\ dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int\ dt \Rightarrow \lg|x| = \frac{t^2}{2} + c \text{ da cui } x\ = \exp\frac{t^2}{2} + c$$

e ponendo $e^c = k$ e sistemando il $\pm$ e poi accogiendo nell'espressione anche la soluzione nulla già trovata si ha

$$x = ke^{t^2/2}$$

Le curve sono simmetriche rispetto all'asse delle y, come parabole molto ripide.
È da notare che il passaggio formale di moltiplicare per dt come se fosse un differenziale è giustificato dal teor. di integrazione per sostituzione.

Altre equazioni a var. sep.; non sempre otteniamo una funzione in forma esplicita.

$$y'(x^2 + 2x + 5) = y \lg|y|$$

$y = 0$ è fuori dal campo di definizione. $|y| = 1$ sono soluzioni. Separando le variabili si ha, avendo già trattato $|y| = 1$,

$$\frac{dy}{y \lg|y|} = \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \quad |y| \neq 1$$

Il secondo integrale lo si manipola spezzando il denominatore in

$$x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4 = \frac{1}{4}[(\frac{x+1}{2})^2 + 1]$$

La soluzione è

$$\lg|\lg|y|\ | + c = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2})$$

Se si vuole esplicitare y, si fa l'esponenziale due volte.

Equazione omogenea:

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

Vedere se ci sono soluzioni che sono rette o semirette spiccate dall'origine. Si vede che gli assi non appartengono all'insieme di definizione. Si trova, ponendo $y = mx$ da cui $y' = m$ e sostituendo $m = \frac{1-m^2}{m}$ da cui $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'origine va esclusa.

Equazioni lineari omogenee di ordine n: l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione n; se se ne trova una base, tutte le soluzioni sono combinazioni lineari degli elementi della base. Tale base si dice *sistema fondamentale di integrali* dell'eq. diff.

Una base si trova facilmente se l'ordine è basso e se i coefficienti sono costanti.
Consideriamo un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti (reali), e poniamo per semplicità il primo coefficiente =1:

$$y'' + ay' + by = 0$$

Costruiamo la sua *equazione caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Le radici di questa, chiamiamole α_1 e α_2, possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse coniugate.
Nel primo caso un sistema fondamentale è costituito da

$$e^{\alpha_1 x}, \; e^{\alpha_2 x}$$

e quindi le soluzioni sono tutte del tipo

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

Nel secondo caso un sistema fondamentale è costituito da $e^{\alpha_1 x}, \; xe^{\alpha_1 x}$ e quindi le soluzioni sono tutte del tipo

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x}$$

Nel terzo caso, se chiamiamo le radici $\alpha_1 = a + ib, \; \alpha_2 = a - ib$,un sistema fondamentale è costituito da $e^{ax} \cos bx, \; e^{ax} \sin bx$ e quindi le soluzioni sono tutte del tipo

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$$

Esaminati casi particolari sia con la radice doppia che con radici reali e complesse.

In patticolare, esaminata l'equazione del terzo ordine

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

che ha la radice semplice $\lambda = 0$ e la radice doppia $\lambda = 1$; pertanto il suo sistema fondamentale di integrali è dato da:

$$1, \; e^x, \; xe^x$$

Se abbiamo una equazione diff. lineare di ordine n *non* omogenea, tutte le sue soluzioni sono costituite da una soluzione particolare di questa sommata a tutte le soluzioni della omogenea associata (quella che si ottiene dall'eq. diff. ponendo il termine noto uguale a 0).
Poiché sappiamo trovare, nei casi semplici, tutte le soluzioni di un'equazione

omogenea, basta saper trovare una soluzione della non omogenea.
Caso particolare:

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 1$$

Quando la non omogenea ha come termine noto un polinomio, essa ha di sicuro una soluzione che è un polinomio; poiché a primo membro compare la y e a secondo c'è un polinomio di 2o grado, provo ponendo $y = ax^2 + bx + c$; derivando questa espressione la prima e la seconda volta e andando a sostituire nell'equazione trovo un'uguaglianza tra polinomi di secondo grado e ne richiedo l'uguaglianza dei coefficienti: si trova $a = 1$, $b =?$ e $c = 7$. Il polinomio con tali coefficienti è una soluzione della non omogenea, a cui vanno aggiunte tutte le soluzioni della omogenea (che sono state trovate al caso precedente).

Se si avesse:

$$y''' - 2y'' + y' = x^2 + 1$$

allora poichćompare la derivata prima, e al secondo membro un polinomio di secondo grado, bisogna provare con un polinomio di terzo grado:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e si deriva una, due e tre volte, e si va a sostituire nell'equazione, e si richiede ancora l'uguaglianza dei coefficienti dei polinomi. Si nota che in questo caso d si può scegliere a piacere; infatti le costanti da sole vanno già nel sistema fondamentale di integrali della omogenea, che abbiamo già trattato.