G50606.tex

Esercizio dato per casa la settimana scorsa:

$$y - = y^{\alpha}$$

A seconda se α è positivo o negativo la funzione $y = 0$ è soluzione oppure no.
****

Esercizi utili per il II compitino

<u>Equazioni differenziali a variabili separabili</u>
Risolvere

$$y' = -y^2.$$

$y = 0$ è una soluzione. Quindi si divide per $y \neq 0$ e si "moltiplica per dx" (trucco tecnico, giustificato dal teor. di integrazione per sost.). Risultano le (semi)iperboli equilatere

$$y = \frac{1}{x+c}$$

che sono definite sulle due semirette disgiunte $]-\infty, -c[$ e $]-c,\ +\infty[$. A seconda di dove si pone la condizione iniziale la soluzione è l'una o l'altra di queste. Ad esempio se si ponesse $y(2) = 4$ la soluzione sarebbe

$$y = \frac{1}{x - \frac{7}{4}}$$

che ha un asintoto per $x = \frac{7}{4}$ e quindi la semiiperbole soluzione del pr. di Cauchy è quella definita sulla semiretta $]\frac{7}{4},\ +\infty[$.
****

Risolvere

$$y' = ky - hy^2 \text{ con } h > 0,\ k > 0.$$

Si può scrivere

$$y' = y(k - hy)$$

$y = 0$ è una soluzione. Anche $y = \frac{k}{h}$ è una soluzione. Dividendo poi per $ky - hy^2 \neq 0$ e "moltiplicando per dx" si ottiene da integrare $\frac{1}{y(k-hy)}$ che si scompone in fratti semplici $\frac{A}{y} = \frac{B}{k-hy}$. Integrando si ha una somma di logaritmi, dei quali il secondo ha l'argomento in cui compare $-y$; risulta quindi il logaritmo di un quoziente, ed eliminando il logaritmo si ha

$$y = \frac{cke^{kx}}{1 + che^{kx}}$$

A seconda dei valori di h e k le curve integrali sono diverse; comunque per $x \to +\infty$ le soluzioni tendono a k/h, mentre per $x \to -\infty$ tendono a 0. La condizione iniziale determina c. Se fosse $y(0) = 0$ la soluzione sarebbe la funzione ovunque nulla trovata all'inizio; se fosse $y(2) = \frac{k}{h}$ la soluzione sarebbe la retta $y = \frac{k}{h}$.
Notiamo che se dalla condizione iniziale risulta $c > 0$ allora le soluzioni sono funzioni definite e continue su tutto l'asse, risultano positive e crescenti, e quindi i loro grafici

sono sempre compresi tra la retta $y = 0$ e $y = \frac{k}{h}$; se risulta $c < 0$ c'è un punto, dipendente da h in cui il denominatore si annulla, e quindi la soluzione è definita su due semirette aperte che escludono quel punto.
Facciamo un caso concreto, con $k = 3,\ h = 2$ e condizione iniziale $y(0) = 1$. Risulta $c = 1$ e quindi la soluzione del pr. di Cauchy è

$$y = \frac{3e^{3x}}{1 + 2e^{3x}}$$

funzione definita su tutto l'asse.
Supponiamo invece che sia $k = 3,\ h = 2$ e condizione iniziale $y(0) = 5$. La condizione determina $c = -\frac{5}{7}$, e quindi nel punto

$$x = \frac{1}{3} \lg \frac{7}{10}$$

(che è un valore negativo) c'è un asintoto. La soluzione è quindi il ramo a destra di tale punto. Se la condizione iniziale fosse $y(0) = -2$ ci sarebbe ancora un asintoto in un punto, e la soluzione sarebbe il ramo a sinistra (verificare con cura).

++

Equazioni lineari a coeff. costanti

$$y'' + ky = 0$$

Eq. caratteristica: $z^2 + k = 0$. A seconda che k sia negativo o positivo si ha $z = \pm\sqrt{-k}$ oppure $z = \pm i\sqrt{k}$. Il sistema fondamentale risulta nel primo caso

$$e^{\sqrt{-k}x}, \quad e^{-\sqrt{-k}x}$$

e nel secondo

$$\cos\sqrt{k}x, \quad \sin\sqrt{k}x$$

e quindi la famiglia di tutte le soluzioni, cioè l'*integrale generale*, è data da tutte le combinazioni lineari delle due funzioni costituenti il sistema fondamentale.
Nel caso $k > 0$ si hanno oscillazioni: si tratta di una molla, di un pendolo.

****

Risolvere

$$y'' = -y', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Poniamo $y' = p$, da cui $y'' = p'$, da cui risulta $p' = -p$. Solita separazione di variabili, che dà

$$\lg p = -x + c_1$$

Dalla seconda condizione si ha $c_1 = 0$, da cui $\lg y' = -x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow$
$y = -e^x + c_2 \Rightarrow c_2 = 2$, per cui la soluzione è

$$y = -e^{-x} + 2$$

Confrontare la soluzione con quella che si trova con il metodo delle eq. lineari a coeff. costanti.

****

Risolvere

$$y''' - 3y'' + y' + 5y = 5; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1$$

Si vede subito che $y = 1$ è un integrale particolare della non omogenea.
L'equazione caratteristica è $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$ che si scompone così

$$(z+1)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Rightarrow z_1 = -1, \quad z_2 = 2 + i, \quad z_3 = 2 - i$$

L'integrale generale della omogenea è

$$y = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

e l'integrale generale della non omogenea è quindi

$$y = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x) + 1$$

Imponendo le tre condizioni si ottengono le tre costanti:

$$c_1 = -\frac{4}{5} \quad c_2 = -\frac{1}{5} \quad c_3 = \frac{3}{5}$$

da cui

$$y = \frac{-4e^{-x} + e^{2x}(-\cos x + 3\sin x)}{5} + 1$$

****

Risolvere

$$y'' - 5y' + 6y = e^x$$

L'eq. caratteristica $z^2 - 5z + 6 = 0$ ha radici $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, per cui l'integrale generale della omogenea risulta

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

Andiamo a cercare un integrale particolare della non omogenea; lo cercheremo tra le esponenziali del tipo $\overline{y} = ke^x$; derivando una e due volte e andando a sostituire nell'equazione abbiamo:

$$e^x - 5e^x + 6e^x = ke^x$$

da cui $k = 2$ e quindi l'integrale generale della non omogenea è:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 2e^x$$

****

Risolvere

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

L'eq. caratteristica $z^2 - 5z + 6 = 0$ ha radici $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, per cui l'integrale generale della omogenea risulta

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

Andiamo a cercare un integrale particolare della non omogenea; ma questa volta tutte le funzioni del tipo ke^{2x} sono soluzioni della omogenea, e quindi nessuna di esse può essere un integrale particolare della non omogenea. Allora li cerchiamo tra le funzioni del tipo kxe^{2x}. Derivando la prima volta otteniamo $ke^{2x} + 2kxe^{2x}$ e derivando la seconda volta otteniamo $2ke^{2x} + 2ke^{2x} + 4kxe^{2x} = 4ke^{2x} + 4kxe^{2x}$. Andiamo a sostituire nell'equazione e otteniamo:

$$4ke^{2x} + 4kxe^{2x} - 5(ke^{2x} + 2kxe^{2x}) + 6kxe^{2x} = e^{2x}$$

da cui notiamo che i termini con xe^{2x} si eliminano, e resta:

$$4ke^{2x} - 5ke^{2x} = e^{2x}$$

da cui $k = -1$, e quindi l'integrale generale cercato risulta:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - xe^{2x}$$

****

Risolvere

$$y''' - 2y'' + y' = 2e^x$$

L'equazione caratteristica $z^3 - 2z^2 + z = 0$ ha radici $z = 0$ e $z = 1$ (doppia). L'integrale generale della omogenea è quindi

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$$

Per trovare un integrale particolare della non omogenea bisogna provare con le funzioni del tipo kx^2e^x.

****

Risolvere

$$y'' - 5y' + 6y = \sin 5x$$

L'eq. caratteristica $z^2 - 5z + 6 = 0$ ha radici $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, per cui l'integrale generale della omogenea risulta

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

Andiamo a cercare un integrale particolare della non omogenea; lo cercheremo tra le combinazioni lineari di $\sin 5x$ e $\cos 5x$, quindi

$$\overline{y} = A\sin 5x + B\cos 5x$$

Derivando una e due volte si ha

$$\overline{y}' = 5A\cos 5x - 5B\sin 5x; \quad \overline{y}'' = -25A\sin 5x - 25B\cos 5x$$

Andando a sostituire nell'eq. si ha

$$-25A\sin 5x - 25B\cos 5x - 5(5A\cos 5x - 5B\sin 5x) + 6(A\sin 5x + B\cos 5x) = \sin 5x$$

e raccogliendo i termini in $\sin 5x$ e i termini in $\cos 5x$ ed uguagliando ordinatamente i coefficienti si determinano A e B.

****

Risolvere

$$ay'' + by' + cy = P(x) + e^{3x} + \cos 2x - 3\sin 10x$$

dove $P(x)$ è un polinomio.
L'integrale generale della omogenea si trova come al solito, e sarà combinazione lineare di due esponenziali se l'eq. caratt. ha radici reali e distinte, sarà una combinazione di un'esponenziale del tipo e^{kx} e di una funzione del tipo xe^{kx} se k è una radice doppia, e sarà un'esponenziale moltiplicata per una combinazione lineare di seni e coseni nel caso di radici complesse coniugate.
Per trovare un integrale particolare si trova dapprima un integrale particolare dell'equazione

$$ay'' + by' + cy = P(x)$$

col solito metodo dei coefficienti indeterminati del polinomio; poi si trova un integrale particolare dell'equazione

$$ay'' + by' + cy = e^{3x}$$

col metodo già visto, facendo attenzione se e^{3x} non fosse già una soluzione della omogenea, nel qual caso si cerca una soluzione del tipo kxe^{3x}; del pari si cerca una soluzione di

$$ay'' + by' + cy = \cos 2x - 3 \sin 10x$$

col metodo già visto. La somma di tali tre integrali particolari è un integrale particolare della non omogenea complessiva, che andrà sommato all'integrale generale della omogenea per ottenere tutti gli integrali della non omogenea.

Risolvere con questa tecnica l'equazione

$$y''' - 4y'' + 4y' = 3x^2 - x + e^{2x} + \sin 3x$$

(poiché non compare la y il polinomio andrà preso di ... grado; poiché 2 è soluzione dell'eq. caratt. non bisogna prendere ke^{2x}, bensì...)

+++++++++++++++

<u>Equazioni differenziali di altro tipo</u>

Data l'eq. diff.

$$y' = y(x^4 + x^2 e^{x^2} + |\arctan x|)$$

si dimostri che le sue soluzioni non identicamente nulle sono invertibili.
Infatti la funzione identicamente nulla è soluzione. Dato il teor. di unicità, non vi sono altre soluzione di problemi di Cauchy del tipo $y(x_0) = 0$; allora tutte le soluzioni hanno un grafico che sta completamente o nel semipiano superiore, o in quello inferiore; allora la y è sempre dello stesso segno, e del pari la y', e quindi c'è invertibilità.

****

Risolvere il pr. di Cauchy:

$$e^{(y'')^3 - y''} = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Da notare: *non* si vuole risolvere l'eq. diff. ma solo *quel* pr. di C.
Si ha

$$(y'')^3 - y'' = 0 \Rightarrow y''(y''^2 - 1) = 0$$

che si spezza in $y'' = 0$; $y''^2 - 1 = 0$. La prima dà un polinomio di primo grado che dà una retta; data la seconda condizione tale retta è orizzontale, e data la prima è la retta $y = 1$.

La seconda equazione dà $y''^2 - 1 = 0 \Rightarrow y'' = \pm 1 \Rightarrow y' = \pm x + c$, ma per la seconda condizione è $c = 0$. Integriamo subito:

$$y = \pm\frac{x^2}{2} + c_1$$

e dalla prima condizione risulta $c_1 = 1$, per cui risultano complessivamente tre soluzioni:

$$y = 1, \quad y = \pm\frac{x^2}{2} + 1.$$

L'equazione non era in forma normale, ognuna delle tre risultanti lo è, e quindi per ognuna c'è un'unica soluzione.

****

Risolvere

$$y' + \frac{y}{x} = \arctan x, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

È lineare del primo ordine a coeff. *non* costanti. Si risolve così:

$$y = e^{-\lg|x|}\int e^{\lg|x|}\arctan x\ dx = \frac{1}{|x|}\int |x|\ \arctan x\ dx$$

Data la condizione iniziale, possiamo scrivere x al posto di $|x|$. L'ultimo integrale si fa per parti prendendo l'arcotangente come fattore finito e risulta dopo qualche passaggio

$$\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + c$$

Si divide quindi tutto per x e tramite la condizione si trova la c.

****

Risolvere

$$x^2y'' - 2xy' = \lg|x|$$

Se dividiamo tutto per x^4 risulta

$$\frac{x^2y'' - 2xy'}{x^4} = \frac{\lg|x|}{x^4}$$

e il primo membro risulta essere la derivata $\frac{d}{dx}(\frac{y'}{x^2})$, da cui integrando:

$$\frac{y'}{x^2} = \int\frac{\lg|x|}{x^4}\ dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}\lg|x| + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x^4}\ dx = -\frac{1}{3}\frac{\lg|x|}{x^3} - \frac{1}{9x^3} + c$$

da cui

$$y' = -\frac{\lg|x|}{3x} - \frac{1}{9x} + cx^2$$

da cui

$$y = -\frac{1}{6}\lg^2|x| - \frac{\lg|x|}{9} + c\frac{x^3}{3} + c_1$$

****