M141011.tex

MATEMATICA 1
(per elettrotecnici ed energetici)

1a settimana
2004/10/11-16

1ª Lezione (2 ore)

Come si è cominciato a contare; i primi segni (I, II, III, IIII, V) su un osso di lupo trovato in una località che ora si trova nella Repubblica Ceca.

Supponiamo di conoscere i numeri naturali 1, 2, 3, ...; il loro insieme viene indicato con $\mathbb{N}$.

Assiomi sui numeri naturali (ci sono vari sistemi di assiomi che definiscono i numeri naturali; noi scegliamo quello di Giuseppe Peano):
1) 1 (poi sarà 0) è un numero naturale
2) per ogni numero naturale n esiste un *successore*, detto *sg* n e questo è unico
3) 1 non è successore di nessun numero
4) numeri naturali diversi hanno successori diversi
5) **Principio di induzione** Se $S \subset \mathbb{N}$ verifica:

$$\begin{aligned}&1 \in S\\ &n \in S \Longrightarrow \mathrm{sg} n \in S\end{aligned}$$

allora $S = \mathbb{N}$.

(N.B. - Alla seconda riga non deve essere verificato che $n \in S$, bensì l'implicazione. Si dà una partenza, si dice che i numeri sono messi in fila, e che la fila è unica, e che non ricomincia un'altra fila.

Definizione di *somma* e di *prodotto* in maniera induttiva:

$$\begin{aligned}&n + 1 = \mathrm{sg}\ n\\ &n + \mathrm{sg}\ m = \mathrm{sg}\ (n + m)\\ &n \cdot 1 = n\\ &n \cdot \mathrm{sg}\ m = n \cdot m + n\end{aligned}$$

Valgono tutte le proprietà solite: commutativa, associativa della somma e del prodotto, quella distributiva della somma rispetto al prodotto. Vale anche la proprietà cancellativa della somma; vale anche quella del prodotto, in quanto in questa formulazione non abbiamo lo zero. Se ci fosse lo zero, quel caso va trattato a parte.

Abbiamo le relazioni d'ordine, col $<$, $=$, $>$, $\leq$, $\geq$ e la solita proprietà maggiorativa della somma; abbiamo la solita proprietà di *tricotomia*, che però funziona solo con le relazioni d'ordine totale $>$, $=$, $<$ e *non* con il minore o uguale. Abbiamo la solita proprietà transitiva dell'ordinamento:

$$a < b,\ b < c \Longrightarrow a < c.$$

0.0.1 Esercizio. È vera $3 \leq 4$? È vera $3 < 4$? □

C'è poi il collegamento tra l'ordinamento e le operazioni:

$$a < b \Longrightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a \cdot c < b \cdot c \text{ ricordiamo che } c \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Principio di induzione: Sia $\mathcal{A}(n)$ un'affermazione che dipende da $n \in \mathbb{N}$. Se
- $\mathcal{A}(1)$ è vera;
- dalla validità di $\mathcal{A}(n)$ si può desumere la validità di $\mathcal{A}(n+1)$;

allora $\mathcal{A}(n)$ è vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

0.0.2 Esercizio. Dimostriamo che $10^n \geq 10 \cdot n\ \forall n \in \mathbb{N}$. È vero per $n = 1$; lo supponiamo vero per n e lo dimostriamo per $n+1$.
Devo quindi dimostrare che è $10^{n+1} \geq 10(n+1)$.
Infatti è

$$10^{(n+1)} = 10^n \cdot 10 > 10^n \cdot 2 = 10^n + 10^n \geq \text{(per ipotesi di induzione)} = 10n + 10n \geq 10n + 10 = 10(n+1)$$

Concludiamo che l'asserto è vero *per ogni n* (qui entra il principio di induzione). □

0.0.3 Esercizio. Esempio del big domino rally e dei soldatini. □

0.0.4 Esercizio. Le due ipotesi che compaiono nel principio di induzione vanno verificate entrambe. Vediamo cosa succede se ne verifico una sola. Prendiamo i numeri interi positivi costituiti da 2 e da tutti i numeri che si ottengono da 2 aggiungeno via via 2; chiamiamo questi numeri a_n. Ora consideriamo il numero 1 e tutti i numeri che si ottengono da 1 aggiungendo via via 2; chiamiamo questi numeri b_n. Chiamiamo *pari* i numeri interi positivi divisibili per 2, cioè tali dividendoli per 2 si ha un quoziente q e resto 0, e diciamo q_n il quoziente che si ottiene dividendo il numero a_n di posto n per 2, e chiamiamo p_n il quoziente che si ottiene dividendo il numero b_n per 2. Notiamo che sia la classe degli a_n sia la classe dei b_n soddisfa al

secondo asserto del principio di induzione: infatti, se suppongo che a_n sia pari, risulta $a_n = 2q_n + 0$; pertanto
$a_{n+1} = a_n + 2 = 2q_n + 2 = 2q_{n+1}$
Se suppongo che b_n sia pari risulta ancora $b_{n+1} = b_n + 2 = p_n + 2 = 2p_{n+1}$.
Quindi per entrambi queste classi di numeri è verificato che, supposta vera la proprietà di essere pari per l'elemento n-simo, risulta pari l'elemento $(n+1$-simo; ma a_1 è pari, quindi soddisfa anche la prima delle due proprietà, mentre b_1 no. □

2a lezione
11.10.2004

0.0.5 DEFINIZIONE. Un numero p si dice *primo* se è divisibile solo per sé stesso e per 1.
(e quindi *non* si può scrivere come prodotto $p = ab$ con $a,\ b \neq p$) □

0.0.6 TEOREMA. *(**di Euclide**) Un numero naturale si può sempre scomporre in fattori primi. Tale scomposizione è unica.*
(niente dim.)

Dal teor. di Euclide segue se un numero primo p è un fattore di un prodotto $a \cdot b$ allora è un fattore di almeno uno tra a e b.
(*niente dim.*)

Esistono infiniti numeri primi.

I numeri reali

Non ci soffermiamo sui numeri reali, le cui proprietà riteniamo note; le operazioni di somma e prodotto, così come quelle di sottrazione e divisione (ricordiamo che non è definita la divisione per 0).
Riteniamo pure note le relazioni di associatività e di distributività delle operazioni. Una struttura su cui siano definite due operazioni che ammettano una unità ed un inverso per ogni elemento si dice *corpo*. Pertanto l'insieme dei reali con le sue due operazioni di somma e prodotto è un <u>corpo numerico</u>.
Ricordiamo che dati due reali x e y sussiste tra loro una ed una sola tra le seguenti relazioni:

$$x < y$$
$$x = y \text{ (proprietà di tricotomia)}$$
$$x > y$$

Ricordiamo che sussiste la proprietà transitiva della disuguaglianza, e la *proprietà archimedea*:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \quad \exists\ n \in \mathbb{N} : nx > y.$$

Invece non è vero che esiste una e una sola tra le seguenti:

$$x \leq y, \quad x = y, \quad x \geq y:$$

infatti è $4 = 4$ e anche $4 \leq 4$, e quindi anche $4geq4$.

Un'altra proprietà è quella di densità: dati due numeri reali distinti, ne esiste sempre uno strettamente compreso tra di essi (**proprietà di densità**.

Occupiamoci di una proprietà specifica dei numeri reali, che non hanno tutti gli insiemi numerici, in particolare non ce l'ha $\mathbb{N}$ (**principio di incastro**):

se abbiamo numeri reali a_n e b_n tali che sia

$$a_n \leq a_{n+1}, \qquad b_n \geq b_{n+1}, \qquad a_n \leq b_m \; \forall n, m \in \mathbb{R}$$

allora esiste almeno un punto x di $\mathbb{R}$ tale che sia

$$a_n \leq x \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo principio si dice anche **principio di completezza** di $\mathbb{R}$.

L'insieme dei reali è un *corpo ordinato archimedeo completo.*

Si dànno per noti il concetto di *valore assoluto* e le sue proprietà.

0.0.7 ESERCIZIO. Se

$$0 \leq a \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

allora $a = 0$.

Infatti se fosse $a > 0$ prendiamo $\epsilon = \frac{a}{2}$; ma siccome è, con $a > 0$, $\frac{a}{2} < a$, avremmo $a > \epsilon$ contro l'ipotesi. □

Attenzione: esistono insiemi, pur ordinati, per i quali non vale la proprietà dell'esercizio precedente.

Sono dati per noti gli **interi relativi**, così come i **razionali**, che sono i quozienti degli interi relativi quando il denominatore sia diverso da 0. Notiamo che gli interi$\mathbb{Z}$ non godono né della completezza né della densità, e che i razionali $\mathbb{Q}$ non godono della ocmpletezza, pur godendo della densità.

Si dà per noto che questi insieme si denotano con $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Dimostriamo che non esiste un numero razionale $\frac{a}{b}$ tale che il suo quadrato sia 2.

Infatti se fosse $\frac{a^2}{b^2} = 2$ avremmo $a^2 = 2b^2$; supponiamo di aver semplificato i fattori comuni, e avremmo che a^2 sarebbe pari, e quindi anche a sarebbe pari; ma allora a^2 sarebbe divisibile per 4, e allora anche b^2 sarebbe pari; ma allora sarebbe pari anche b, il che è contro l'ipotesi che il quoziente a/b fosse ridotto ai minimi termini.

Non dimostriamo che c'è un numero reale il cui quadrato vale 2 (si dimostrerebbe con il principio di incastro).

Con ragionamento analogo si può dimostrare che ogni numero reale positivo n ha almeno una **radice n-sima** nell'insieme dei numeri reali, cioè dato un numero reale $\lambda \geq 0$ ed un numero naturale n allora $\exists\ !\ \xi$ tale che $\xi^n = \lambda$. (*niente dim.*)
Tale numero si indica con $\xi = \sqrt[n]{\lambda}$ oppure con $\xi = \lambda^{\frac{1}{n}}$.

Vengono date per note le proprietà dei numeri reali, la loro rappresentazione decimale, i numeri decimali periodici, la funzione generatrice di un numero decimale periodico, numeri positivi e negativi, ecc.

Da notare che i numeri decimali finiti si possono tutti scrivere come numeri decimali infiniti di periodo 9: 1= 0,9999 ....

Si indica con $(x)_p$ il numero decimale finito ottenuto dall'allineamento decimale che esprime x troncato al decimale p-esimo.

Nomenclatura sugli intervalli *aperti, chiusi, semiaperti (a destra, a sinistra), semirette a destra, a sinistra, chiuse, aperte, di origine a, ecc..*

Un punto di un intervallo si dice *interno* se non coincide con nessun estremo.

Principio di incastro per gli intervalli

0.0.8 Teorema. *Se I_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ è una successione di intervalli chiusi incastonati (cioè contenenti ciascuno il successivo: $I_k \supset I_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$), allora esiste almeno un numero reale x tale che $x \in I_k\ \forall k = 1, 2, \ldots,$ cioè $\cap\{I_k :\ k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$.*

È semplicemente la formulazione per gli intervalli di quello che abbiamo visto per i numeri reali.

Notiamo che se non sono chiusi non è vero: Sia $I_k = \{x : 0 < x < \frac{1}{k}\}$: la loro intersezione è vuota. Inoltre in $\mathbb{Q}$ non è vero, anche quando gli intervalli fossero chiusi.

Definizione di un *maggiorante* m di un insieme A di numeri reali:

$$m \geq a\, \forall a \in A$$

Massimo: a^*se è maggiore di tutti e appartiene ad A.

Di maggioranti possono essercene molti; di massimi, se ce ne sono, ce n'è uno solo.

Analogamente per il minimo. $\frac{1}{n}$ ha massimo 1 ma non ha minimo.

3a lezione
13.10.2004

Insieme *superiormente limitato, inferiormente limitato.*
Insieme *limitato*: se è limitato l'insieme dei moduli:

$$|a| \leq m \, \forall \; a \in A$$

0.0.9 Esercizio. Trovare il massimo, minimo, i maggioranti e minoranti dell'insieme costituito dai punto 0 e 1, dell'intervallo pieno, di due intervalli chiusi, semichiusi, aperti. □

0.0.10 Teorema. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato e non vuoto. Allora l'insieme M di tutti i maggioranti ha un elemento minimo s, cioè $\exists s \in M$ tale che*

$$s \leq m \quad \forall m \in M$$

Ciò significa che $\exists \; s \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{array}{ll} s1) & s \geq a \; \forall a \in A \\ s2) & \text{se } m \geq a \quad \forall a \in A \text{ allora } m \geq s. \end{array}$$

0.0.11 Definizione. Il minimo dei maggioranti di un insieme A di numeri reali si dice **estremo superiore** di A e si indica con

$$s = \ \sup A$$

. □

Nella dimostrazione dell'esistenza (che saltiamo) si vede che l'estremo superiore sup A di un insieme A gode delle seguenti due proprietà:

$$\begin{array}{l} a \leq \ \sup A \quad \forall a \in A \\ \text{se } a \leq m \quad \forall a \in A \quad \text{ allora } \sup A \leq m. \end{array}$$

Da notare che se fosse verificata una disuguaglianza più forte, come

$$\text{se } a \leq m \quad \forall a \in A$$

non per questo risulterebbe anche la disugugaglianza stretta sup$A < m$; la disuguaglianza resterebbe sempre con il segno di leq.

Quando un insieme A non è superiormente limitato si converrà di dire che sup $A = +\infty$.

Analogamente si dà la definizione di **minorante** di un insieme A di numeri reali; sarà dimostrabile l'esistenza del massimo dei minoranti, e questo si dirà inf A.

0.0.12 Esercizio. Determinare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\{n - \frac{1}{n}\} : \quad n \in \mathbb{N}$. □

0.0.13 Esercizio. Se è $\sup A = \inf A$, come è fatto A? □

0.0.14 Esercizio. Due insiemi di numeri reali hanno lo stesso inf e lo stesso sup; sono uguali? □

0.0.15 Esercizio. Due intervalli sulla retta hanno lo stesso inf e lo stesso sup; sono uguali? □

0.0.16 Esercizio. L'insieme dei punti $\{n\} \cup \{\frac{1}{n}\}$ è limitato? Ha estremo inferiore, superiore, massimo minimo? □

0.0.17 Esercizio. L'insieme dei punti $\{n - \frac{1}{n}\}$ è limitato? Ha estremo inferiore, superiore, massimo minimo? □

0.0.18 Esercizio. Calcoliamo la somma $\sum_{k=1}^{n} k$.
Risulta $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$.Se scriviamo questa uguaglianza per tutti i singoli k da 1 fino ad n e poi sommiamo membro a membro abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Adesso facciamo slittare gli indici: risulta

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = (\text{isolando l'ultimo termine}) = \sum_{k=2}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Se prendiamo i due primi membri delle due ultime formule essi sono uguali; uguagliando i secondi membri, notiamo che hanno entrambi la sommatoria dei k^2, ,a uno ha un termine in più che vale 1. che quindi viene eliminata e resta

$$(n+1)^2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n$$

da cui si deduce

$$[\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - n - 1] = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1 - n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

cosa che peraltro era riconoscibile subito: si sommano il primo e l'ultimo addendo e se ne fa la media, e questa la si moltiplica per n che è il numero degli addendi. □

0.0.19 Esercizio. Questa volta proviamo a fare la somma non dei numeri bensí delle potenze dello stesso numero: $\sum_1^n x^k$.
Moltiplico tutto per $1-x$ ed ottengo:

$$(1-x)\sum_1^n x^k = \sum_1^n x^k - x\sum_1^n x^k = \tag{0.0.1}$$
$$(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1}) = x - x^{n+1}$$

da cui:

$$\sum_1^n x^k = \begin{cases} \frac{x-x^{n+1}}{1-x} \text{ se } x \neq 1 \\ n \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

□

0.0.20 Esercizio. Proviamo a calcolare la formula appena trovata utilizzando invece il principio di induzione.
Dobbiamo verificare che per $n = 1$ essa è vera. Infatti la sommatoria a sinistra si compone di un termine solo, che vale x, e l'espressione a sinistra vale

$$\frac{x - x^2}{1 - x}$$

che si semplifica e resta x, c.v.d.
Adesso dimostriamo che, supponendo la formula vera per n, essa risulta valida per $n+1$. Infatti è:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1}$$

Ma per l'ipotesi di induzione la prima sommatoria ci è nota, e quindi risulta:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{x - x^{n+2}}{1 - x}$$

□

0.0.21 Esercizio. Dato un insieme A si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme costituito da tutti i suoi sottoinsiemi. Detto di passaggio, notiamo che l'insieme vuoto $\emptyset$ non ha elementi, ma l'insieme dei suoi sottoinsiemi è costituito da un insieme che ha un elemento che è l'insieme vuoto, e che quindi si indica così: $\{\emptyset\}$.[1] Sia adesso A un insieme costituito da n elementi, con n generico, che possiamo indicare così:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

[1] Non si confondano $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$!

Vogliamo verificare che il numero di elementi che compone $\mathcal{P}(A)$ è 2^n. Dimostriamolo per induzione. Dobbiamo verificare il *punto base* e poi il *passo induttivo*. Il punto base lo abbiamo già verificato: se A è l'insieme vuoto, cioè con 0 elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha $1 = 2^0$ elementi.
Verifichiamo adesso il *passo induttivo*. Dobbiamo verificare che, supponendo vero che quando A ha n elementi $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi, allora quando A ha $n+1$ elementi $\mathcal{P}(A)$ ha 2^{n+1} elementi.
Infatti scomponiamo A in un insieme A_1 che ha n elementi e lo uniamo ad un insieme A_2 composto di un elemento solo, e possiamo scrivere così:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}\}$$

L'insieme delle parti di A è costituito dalle parti di A_1 (compresa la sua parte vuota) a cui si aggiungono le parti che si ottengono da queste aggiungendo a ciascuna di queste a_{n+1}. Le prime sono, per ipotesi del passo induttivo, in numero di 2^n e le seconde sono ancora in numero di 2^n; pertanto è:

$$\mathcal{P}(A) = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

risulta quindi che è $\mathcal{P}(A) = 2^n$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, c.v.d. □

4a lezione
14.10.2004

Scriviamo ora la formula che dà i coefficienti del **binomio di Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$$

I numeri C_k^n si dicono *coefficienti binomiali* e rappresentano il numero di sottoinsiemi costituiti da k oggetti presi da un insieme di n oggetti (cioè n oggetti presi a k per volta).

Definizione di *fattoriale*:

$$\begin{aligned} &0! = 1 \\ &n! = n(n-1)! \end{aligned}$$

Qeusta definizaione è data *per ricorsività*.
Altrimenti: $0! = 1; n \neq 0: \; n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1!$

Capitolo 2

Nomenclatura sulle funzioni: dominio, immagine, grafico, parte intera, mantissa, dominio, intersezione con le parallele all'asse delle y;
$y = ax + b$ Trovarne il dominio e il codominio sia per $a = 0$ che per $a \neq 0$.

Parte intera, mantissa.
Polinomi, funzioni razionali.

****

Non faranno parte del programma d'esame:
Cap. 1:
dim. del teor. 1.2; dalla dim. della prop. 1.3 alla fine del par. 1.2; dim. di prop. 1.5; dalla sestultima riga di p. 10 fino a prima del "Nota Bene" di p. 11; dim. di 1.6; par. 1.4 fino alla fine di pag. 18; dim. del teor. 1.9; da metà di p. 30 alla fine di p. 31; dim. della prop. 1.12.