M142sett.tex

MATEMATICA 1

2a settimana
18.10.20

Definizione di funzione, nomenclatura: dominio, codominio, immagine, intersenzione con le parallele agli assi; funzione crescente, decrescente (monotonia).

Equazione della retta:

$$y = kx$$
$$y = kx + b$$
$$y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

Significato dei coefficienti.

Equazione della parabola:

$$y = x^2$$
$$y = ax^2$$
$$y = ax^2 + b$$

Parte intera, mantissa.

Funzione convessa: che sta sotto alla retta secante;
risulta

$$f(ax_1 + bx_2) \leq a\ f(x_1) + b\ f(x_2)$$

Funzione concava: se $-f$ è convessa.

Composizione di funzioni.
Funzione composta

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\cos x^2$; $\lg \sqrt{|x|}$
Si scrive $g \circ f(x)$.

La composta di due funzioni crescenti è crescente, di due funzioni decrescenti è crescente, di due funzioni una crescente e una descrescente è decrescente.

Attenzione alla non commutatività $f \circ g \neq g \circ f$:

$$\cos x^2 \neq \cos^2 x; \quad \lg(x-1) \neq \lg x - 1$$

Funzione inversa. Una funzione crescente è invertibile. Non è detto il viceversa. Arcoseno, arcocoseno, arcotangente.
Notazione f^{-1}; risulta $f^{-1} \circ f^{-1} = f$. Grafico di una funzione inversa come simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Grafico del logaritmo e dell'esponenziale a^x con $a > 1$.

Grafico dell'esponenziale a^x con $0 < a < 1$.

Successione come $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$
In particolare le successioni di numeri reali quando è $A = \mathbb{R}$.

Definizione di limite, finito o infinito.

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Mostrare alcune successioni che tendono a 0, a un limite finito, che non tendono a niente, che tendono ad un limite infinito.

$$\frac{n+1}{n} \to 1$$

Il limite lo devo indovinare per poter verificare se gode della proprietà.

Se una successione è crescente e limitata allora ha limite finito (con dim.)

Comportamento di

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

(senza dim.) Si indovina che è crescente (conto fatto solo sui primi termini) e che è limitata da 3. Pertanto ha limite, che è minore di 3, che viene indicato con e.

Sottosuccessioni convergenti di una successione che non converge:

$$(-1)^n; \qquad (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

Proprietà del limite: se esiste è unico.

Teorema della permanenza del segno.

0.0.1 Esercizio. Se una successione è fatta di numeri positivi ed ha limite, il limite è positivo?
R. No; vd. ad esempio la successione $\{\frac{1}{n}\} \to 0$. L'unica cosa che posso dire è che il limite è positivo *o nullo*. Non puøinvece essere negativo, perché questo andrebbe contro il teorema della permanenza del segno. □

Il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti.

Proprietà fondamentali del limite (senza dim.).

0.0.2 Esercizio. (32.11 del testo) Una successione che tende a 0 moltiplicata per una limitata (di cui non si sa neppure se ha un limite) è una nuova successione che tende a zero. (importantissimo!) □

N. B. - Sono importantissimi gli esercizi da 2.12 a 2.17, nonché il comportamento di $\sum_{k=1}^{n} x^k$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ con $x \in \mathbb{R}$ fissato. Principio di confronto (o dei carabinieri)

Definizione di $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ come generalizzazione del concetto di limite per le successioni.

0.0.3 Esempio. Funzioni che tendono a zero: esponenziale a^x con $a < 1$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$. □

Se una funzione ha un limite l per $x \to \infty$ allora quello è il imite su tutte le successioni di punti che vanno all'infinito.
Controesempio: il seno che su una succ. di punti vale 0, su un'altra vale 1.
****

Non faranno parte del programma d'esame: la verifica di p. 48; la dim. di p. 49; la dim. delle proprietà del limite (p. 51-52); esempi 2), 3), 8), 10), 14); la risoluzione dell'es. 2.20.