M143sett.tex

MATEMATICA I

3a settimana
25.10.2004

Tutte le definizioni di limite per $x \to \infty$, per $x \to +\infty$, per $x \to -\infty$ con significato geometrico.

Tutte le definizioni di limite per $x \to x_0$, per $x \to \infty$ con sigificato geometrico.

Esempio utilizzando il grafico dell'arcotangente.

Teorema della permanenza del segno.

Limte della somma uguale alla somma dei limiti. Resta escluso il caso $= \infty - \infty$.

Limite del prodotto, se sono finiti l_1 ed l_2, uguale al prodotto dei limiti. Resta escluso il caso $0 \cdot \infty$.

Limite del quoziente uguale al quoziente dei limiti se il denominatore ha limite diverso da 0.

Se $f(x) < g(x)$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$; attenzione, non si può mettere il minore stretto.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ e sul segno dipende, se tendeva a zero restando positivo il limite sarà $+\infty$, se restava negativo il limite sarà $-\infty$.
Una funzione limitata moltiplicata per una che ha limite 0 è una funzione che ha limite 0.

<u>Teorema della limitatezza locale</u>.
Se $\lim_{x_0} f(x) = l$ allora $\exists M > 0,\ r > 0$ tali che

$$0 < |x - x_0| < r \Longrightarrow |f(x)| \leq M$$

Definizione di funzione continua.

Limiti laterali per una funzione crescente.
(*niente dim.*)

Esempi di funzioni continue su tutto il loro insieme di definizione: costanti, polinomi, funzioni trigonometriche, prolungamento per continuità: è impossibile per $e^{1/x}$.

Somme, prodotti e composizioni di funzioni continue sono continue.

Teorema degli zeri per una funzione continua su un intervallo.

Definizione di massimo e minimo per una funzione; definizione di funzione limitata, di sup, di inf.

<u>Teorema di Weierstrass</u> per le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Condizione di Lipschitz su un intervallo (basterebbe un insieme A):

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_1 - x_2|.$$

Una funzione che soddisfa la condizione di Lipscitz si dice *lipscitziana.*.
Notare la differenza con un funzione continua in tutti i punti dell'intervallo.

Somme, prodotti e funzioni composte di funzioni lipschitziane sono funzioni lipschitziane.

Se una funzione è lipschitziana è anche continua; non è vero il viceversa (ad es. $f(x) = \sqrt{|x|}$.)

Somme, prodotti, composizioni di funzioni lipschitziane sono lipschitziane. (*niente dim.*).

0.0.1 Esempio. Vogliamo calcolare $\sum_{k=1}^{n} x^k$ al variare di x.
Ricordiamo che è $\sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + \cdots + x^n$.
Se $x = 1$ abbiamo che la somma vale n.
Se $x \neq 1$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

Calcoliamo ora cosa viene quando facciamo tendere n all'infinito, e quindi scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k = \lim_{n \to +\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x}{1 - x}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x}{1 - x}$$

Se $x = -1$ abbiamo che la successione è indeterminata (viene 0 se n è pari, e invece -1 se n è dispari).
Se $x > 1$ la successione è divergente: va a $+\infty$.

Se $x < -1$ la successione va a $-\infty$ sugli n dispari e a $+\infty$ sugli n pari. Pertanto, posto

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k$$

abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{per } |x| < 1 \\ +\infty & \text{per } x > 1 \\ \text{non è definita per } x \leq -1. \end{cases}$$

$\square$

0.0.2 TEOREMA. *Una funzione f ha limite L per $x \to x_0$ se e solo se su ogni successione di punti x_n che tendono a x_0 con $x_n \neq x_0$ risulta* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
(senza dim.)

Limite laterale destro e sinistro.
Esistenza dei limiti laterali per una funzione monotona.

****

Non faranno parte del programma d'esame: Risoluzione dell'esercizio 2.21; dim. del teor. 2.6; dim. del teor. 2.7; dim. del teor. 2.9; dim. del teor. 2.11; dim. del teor. 2.13; dim. del teor. 2.15; dim. della proprietà di p. 74; le dim. di p. 75.