M144sett.tex

MATEMATICA 1

4a settimana
1.11.2004

1.11.2004: vacanza

2.11.2004
Niente lezione: viene recuperata giovedì 4.11.2004 con un'esercitazione avente valore di prova parziale.

3.11.2004

Ripresa della definizione di differenziabilità in un punto, che fa intervenire la tangente nel punto x_0.
Se vi fossero due tangenti, esse avrebbero lo stesso coefficiente angolare; infatti se fosse:

$$T_1(x) = m_1(x - x_0) + f(x_0) \qquad T_2(x) = m_2(x - x_0) + f(x_0)$$

calcoliamo

$$\begin{array}{l} 0 = \lim_{x \to x_0} [\frac{T_1(x) - f(x) - [T_2(x) - f(x)]}{x - x_0}] = \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{T_1(x) - T_2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{m_1(x - x_0) - m_2(x - x_0)}{x - x_0} = m_1 - m_2 \end{array}$$

da cui $m_1 = m_2$.

Se una funzione è derivabile è continua; non è detto il viceversa.
$f(x) = |x|$ non ha tangente nel punto $x = 0$.

La derivata di una costante è banalmente 0. Viceversa, se una funzione ha derivata 0 in tutto un intervallo (a, b), allora essa è costante.
Notiamo che è essenziale che siamo su un intervallo, altrimenti la tesi non è vera. Ad es. la funzione che è definita come +1 sui reali negativi e -1 sui reali positivi ha sempre derivata nulla, ma non è costante (e infatti non siamo su un intervallo).

0.0.1 TEOREMA. *(di Lagrange o del valor medio) - Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Se inoltre f è derivabile sull'intervallo aperto (a, b), allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(\xi)$$

Ciò significa che esiste almeno un punto in cui la tangente al grafico è parallela alla retta congiungente il punto $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$
È essenziale che f sia definita su un intervallo chiuso $[a, b]$, perché si parla di

$f(a)$ e di $f(b)$; è essenziale che f sia derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto, perché non sappiamo dove sia ξ; è essenziale la continuità agli estremi: infatti per ognuna di queste proprietà che mancasse si possono fare dei controesempi.

Caso particolare del teor. di Lagrange è quando $f(a) = f(b)$; in tale caso esiste un punto ξ tale che $f(\xi) = 0$ (*teorema di Rolle*).

0.0.2 ESEMPIO. Sia f derivabile in (a, b) e sia $\xi \in (a, b)$ un punto tale che $f(\xi) \geq f(x) \ \forall x \in (a, b)$. Allora $f'(\xi) = 0$.
Il testo dice un fatto un po' più generale: se la f è definita su un intervallo aperto e in un punto di massimo la f è derivabile, allora la derivata in quel punto è nulla. Infatti tutti gli incrementi con x a destra dix_0 sono negativi, e quindi, poiché il denominatore è positivo il limite del rapporto incrementale a destra di ξ è negativo o nullo; viceversa tutti gli incrementi con x a sinistra dix_0 sono ancora negativi, e quindi, poiché il denominatore è negativo il limite del rapporto incrementale a sinistra di ξ è positivo o nullo. Allora tale limite, se deve esistere da entrabi i lati, è nullo. Pertanto nei punti di massimo e minimo <u>interni</u> la derivata è nulla.
Attenzione: se f fosse definita su un intervallo chiuso, o peggio, su un insieme che non è un intervallo, il punto di massimo potrebbe esistere, la derivata destra o sinistra anche, e non essere nulla. Un *punto isolato* potrebbe essere punto di massimo, eppure non ha senso parlare di derivata in un punto isolato, perché non ha senso fare il rapporto incrementale. Se siamo su un insieme chiuso e limitato e la f è continua il massimo, e quindi il punto di massimo, esiste di sicuro per il teor. di Weierstrass, altrimenti non siamo sicuri). □

0.0.3 ESEMPIO. Assoltamente analogo è il discorso per il minimo: se f è derivabile nel suo punto di minimo, allora la derivata è ivi nulla. □

Fare l'esercizio 3.3.
Si tratta di una funzione che si annulla quattro volte nei punti -3, -2, -1, 0. Allora negli intervalli [-3, -2], [-2, -1], [-1, 0] la funzione soddisfa il teor. di Lagrange, e ci sono tre punti in cui la derivata è nulla.

Fare l'es. 3.5.

Vengono presentate come corollari del teor. di Lagrange alcune proprietà notevolissime delle funzioni ristrette ad un intervallo:

se la derivata è positiva o nulla (in un intervallo) la funzione è crescente (non necessariamente strettamente) nell'intervallo;

analogamente per la decrescenza;

se la derivata è sempre nulla la funzione è costante;

se la derivata è strettamente positiva la funzione è strettamente crescente;

se kla derivata è strettamente negativa la funzione è strettamente decrescente;

se due funzioni hanno la stessa derivata differiscono per una costante;

se $f'(x) < g'(x)$ ed esiste un punto x_0 in cui è $f(x_0) = g(x_0)$ allora è $g(x) < f(x)$ a sinistra di x_0 e $g(x) > f(x)$ a destra di x_0.

Derivata delle funzioni trigonometriche, di $\lg x$; $(a^x)' = a^x \lg_e\ a$.

Derivata ed operazioni algebriche:
la derivata di una somma è la somma delle derivate, la derivata di un prodotto $f(x)g(x)$ è $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, e per il quoziente la formula solita.

Effettuiamo derivate di un polinomio di terzo grado e abbozziamone il grafico a seconda dell'annullarsi in punti reali della derivata.
Verificare dove esiste e dove no la derivata del valore assoluto
$*****************$

Non faranno parte del programma d'esame: la dim. del teor. 3.2; es. 3.6; es. 3.7; il caso c) del cor. 3.4; 3.1.1 (escluse le formule); 3.1.2 (esclusa la prima formula).