M147sett.tex

MATEMATICA 1 - 2004

7a settimana

giovedì 25 ci sarà il compitino: alle 14.40 gli elettrotecnici, alle 16. 30 gli energetici

22.11.2004

Proseguiamo con l'arte di calcolare gli integrali.
L'integrale della somma è la somma degli integrali.

Calcoliamo

$$\int_3^{10} \frac{x}{6(x-1)(x-2)}\, dx = \frac{1}{6}\int_3^{10} \frac{x}{(x-1)(x-2)}\, dx$$

Cerchiamo una primitiva dell'integranda, e scriviamo

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \\ = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=0 \end{cases}$$

da cui $B = 1 - A$ e $-2A-(1-A) = 0 \Longrightarrow A = -1$, e quindi $B = 2$. Pertanto le primitive sono $-\lg|x-1|$ e $2\lg|x-2|$. L'integrale complessivo vale dunque

$$\tfrac{1}{6}[-\lg|x-1| + 2\lg|x-2|]_3^{10} = \tfrac{1}{6}[-\lg 9 + 2\lg 8 - (-\lg 2 + 2\lg 1)] = \\ = \tfrac{1}{6}[-2\lg 3 + 2\lg 8 + \lg 2] = \tfrac{1}{6}[-2\lg 3 + 2\lg 8] = \tfrac{1}{6}[-2\lg 3 + 6\lg 2] > 0$$

Attenzione: questo funziona se il numeratore ha grado minore del denominatore e se il denominatore ha radici reali. Inoltre una primitiva la trovo sempre, ma poi l'integrale definito deve essere cercato su intervalli nei quali la funzione è continua.

Se il grado del numeratore fosse 3 dovrei prima effettuare la divisione. Effettuato esempio di una divisione tra polinomi, sia se il grado del numeratore è superiore a quello de denominatore, sia se è uguale.
Se la funzione razionale è del tipo $P(x)/Q(x)$, con grado di $P \quad = n$ e grado di $Q \quad = m$, allora il quoziente ha grado $n-m$, e il resto ha al più grado $m-1$. Nel caso che i due gradi siano uguali, il resto è una costante.

Un altro esempio è dato da

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

Distinguiamo due casi: $n > 1$ ed $n = 1$. Consideriamo dapprima $n > 1$. È $x = \frac{1}{2}2x$ e quindi ponendo $1+x^2 = t$ ho $1/2\int t^{-n}\, dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-n+1}}{n+1} + c =$

$\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{n+1} + c$.
Consideriamo ora il caso $n = 1$. Abbiamo sempre $x = \frac{1}{2}2x$ e quindi ponendo $1 + x^2 = t$ si ha

$$\int \frac{x}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\lg(1+x^2) + c.$$

Calcoliamo

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Una primitiva risulta chiaramente $2\sqrt{x}$ e quindi l'integrale vale $2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon}$. Facendo tendere $\epsilon \to 0$ si ottiene 2.

Attenzione: la cosa invece andava all'infinito se avevo $\frac{1}{x}$ al posto di $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Attenzione: la cosa invece andava all'infinito se volevo fare l'integrale da 1 a k e poi far tendere $k \to \infty$.

Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^k \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^k$$

per $k \to +\infty$ si ha $\pi/2$.

Abbiamo così calcolato due limiti di integrali, che sono risultati talvolta finiti e talvolta infiniti. Possiamo allora definire l'integrale anche in due casi per i quali non l'avevamo deifinito prima. Infatti per definire l'integrale ci eravamo posti due ipotesi: *che la funzione fosse limitata* e che *l'intervallo fosse limitato*. Possiamo ora, almeno nel caso visto sopra, definire l'integrale rinunciando alla prima ipotesi nel modo seguente:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = * \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;$$

nel caso che l'insieme su cui vogliamo definire l'integrale sia una semiretta poniamo

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = * \lim_{k\to+\infty}\int_1^k f(t)\,dt$$

Gli asterischi significano che noi definiamo il primo membro, che finora non aveva significato, tramite il secondo, che invece è il limite di una successione di integrali di funzioni per le quali il concetto di integrale era già stato definito.

Questi tipi di integrali si dicono integrali generalizzati.

Possiamo notare che nei casi esaminati non esiste finito l'integrale di $\frac{1}{x}$ né da 0 a 1 né da 1 a $+\infty$; per la funzione $1/\sqrt{x}$ esiste da 0 a 1, ma non sulla semiretta $[1, +\infty)$, mentre per $1/x^2$ esiste sulla semiretta (e risulta $\lim k \to +\infty[-1/x]_1^k = 1$), mentre non esiste da 0 a 1.

Calcoliamo $\int \sin x \cos x\ dx$; poiché il coseno è la derivata del seno risulta $\frac{\sin^2 x}{2} + c$.

Notiamo che le primitive della tangente sono $\lg|\cos x| + c$.

Calcolare per parti

$$\begin{aligned} &\int \arcsin x = x \arcsin x - \int x \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

Calcolare per parti $\int \arctan x\ dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2) + c$.

$\int x \arctan x\ dx$. Posso fare lo stesso procedimento dopo però ci vuole il trucchetto del +1 e -1 per poter fare l'ultimo integrale (oppure dividere x^2 per $1+x^2$.

Esercizi sulle funzioni: $f(x) = x + \cos x$ e $x + \sin x$. Sono entrambe crescenti, ancorché la derivata si annulli infinite volte (ma non è mai negativa).

Si può calcolare facilmente

$$\int \frac{x^n}{e^x}\ dx = \int x^n e^{-x}\ dx$$

e integrando per parti n volte si abbassa il grado di x^n fino a ridurlo a 0.

Studiamo invece la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^3}$$

Tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e per $x \to 0^+$; tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$ e a 0 per $x \to -\infty$. È sempre positiva per gli x positivi, sempre negativa per gli x negativi.

$$f'(x) = \frac{e^x x^3 - e^x 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 e^x (x-3)}{x^6}$$

Cè minimo per $x = 3$: la derivata a destra è positiva, a sinistra è negativa. Se volessimo calcolarne una primitiva potremmo provare ad adottare lo stesso metodo di prima:

$$\begin{aligned} &e^x x^{-2}/2 - 1/2\ \int x^{-2} e^x\ dx = e^x x^{-2}/2 - 1/2[e^x(-1)x^{-1} + \int \tfrac{1}{x} e^x\ dx] = \\ &e^x x^{-2}/2 - 1/2[e^x(-1)x^{-1} + ???] \end{aligned}$$

Quest'ultima primitiva non la so calcolare (non esiste in termini finiti, cioè non esiste come combinazione di funzioni elementari come i polinomi, le radici, i logaritmi, le esponenziali, le funzioni trigonometriche e le loro inverse).
Però posso rispondere alle seguenti domande:
Questa funzione primitiva ha massimi e minimi? Ha flessi? La derivata

non si annulla mai. La funzione primitiva è crescente per x positivi, decrescente per x negativi. Nel punto 0 non esiste. La derivata va all'infinito per $x \to +\infty$.

Tra tutte le primitive di $\sin x$ quale è quella che per $x = 0$ vale 3?
Le primitive sono tutte del tipo $-\cos x + c$ e quindi $c = 4$.
Quindi $-\cos x + 4$ è una funzione che soddisfa alle seguenti condizioni:

$$f'(x) = \sin x; \qquad f(0) = 3$$

Studio di $f(x) = x \lg x$ e di $f(x) = x^x = e^{x \lg x}$ con particolare riguardo alla derivata prima e ai suoi limiti per $x \to 0$ (attacchi della funzione).

Sviluppi asintotici e calcolo approssimato - Cap. 8
Teor. di Cauchy o degli incrementi finiti (niente dim.: proposta quella sbagliata per far capire che non è una banalissima conseguenza del teor. di Lagrange).
Regola di L'Hospital detta sia nel caso 0/0 che nel caso ∞/∞.

Esempio in cui esiste il limite del rapporto tra le funzioni senza che esista però il limite del rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \cos x}{2x + \sin x} = 2$$

mentre il limite del rapporto tra le derivate

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$$

chiaramente non esiste.

Riconoscimento, tramite l'applicazione della regola di L'Hospital, delle considerazioni intuitive sulla rapidità di tendenza a zero o all'infinito di esponenziali e di logaritmi <u>rispetto a potenze della x</u>

25.11.2004
Seconda prova parziale.

****

Non faranno parte del programma d'esame: dim. del teor. 8.1; dim. del teor. 8.2; esercizi 8.3, 8.4, 8.5.