M149sett.tex

MATEMATICA 1 - 2004

9a settimana

6.12.2004 e 7.12.2004

1. Funzioni iperboliche e loro derivate:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Grafici; derivate.
Polinomio di Taylor nel punto $x = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)/2!\ x^2 + f'''(0)/3!\ x^3 + o(x^3)$$

Per il seno iperbolico è:

$\sinh x = \cosh(0)x + \sinh(0)/2\ x^2 + \cosh(0)/3!\ x^3 + o(x^3) = x + x^3/3! + o(x^3)$

Per il coseno iperbolico è:

$\cosh x = \cosh(0) + \sinh(0)x + \cosh(0)/2!\ x^2 + o(x^2) = 1 + x^2/2 + o(x^2)$

2. Trovare il grafico approssimativo di $\sinh x - \cosh x + 1$ in un intorno di 0 (cioè in un intervallino contenente 0).
Si ha $x - x^2/2 + x^3/6$ che si annulla in $x = 0$ e in $x^2/6 - x/2 - 1 = 0$ che non dà altre radici.
È un infinitesimo del 1^o ordine.

3. Studiamo la funzione $f(x) = \tanh x$ Calcoliamo

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \text{ Hospital } = \text{ non si approda a niente}$$

Eliminando gli infinitesimi rispetto agli infiniti il limite è palesemente 1 per $x \to +\infty$ e -1 per $x \to -\infty$. La derivata è

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

che non si annulla mai (il numeratore è sempre =1, verificare che i quadrati si eliminano e restano i due doppi prodotti che fanno 1 e divisi per 2 fanno 1 nel complesso), è sempre positiva: la funzione cresce da -1 a 1, ha un flesso nello zero perché la f' ha max in $x = 0$.

4. $$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

   Che tipo di infinito è per $x \to 1$? Del primo ordine (guardo l'inverso). Qual è il suo polinomio di Taylor di grado 2 in un intorno di 0?

   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)/2\ x^2 + f'''(0)/6\ x^3 + o(x^3)$$

   Quindi
   $$P(x) = 1 + x + 2/2\ x^2$$
   è una parabola che ha minimo per $x = -1/2$ che vale $f(-1/2) = 3/4$.

5. Calcolare il limite
   $$lim_{x\to 0}\frac{xe^x \cos x - \lg(1+x)}{x^2}$$

   Basta sviluppare e buttare via gli infinitesimi di ordine superiore:

   $$xe^x \cos x = x(1+x+x^2/2+o(x^2))(1-x^2/2+o(x^2)) - (x-x^2/2+o(x^2))$$

   Resta solo $x^2 + x^2/2$ e quindi il rapporto viene $3/2$.

6. Studiare la funzione
   $$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$$
   Pari, sempre positiva, va a 0 per $x \to \infty$; la derivata ha numeratore
   $$-2xe^{x^2}(2+x^2),$$
   si annulla solo in 0, la f è crescente prima di 0, decrescente dopo, in 0 c'è un massimo che vale 1. Si può indovinare subito che la parabola che meglio approssima varrà 1 in 0, avrà l'asse coincidente con l'asse y, sarà concava; facendo i conti viene $1 - 2x^2$. I flessi si indovinano.

7. Calcolare
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx$$

   È un integrale generalizzato, per cui calcoliamo prima un primitiva tra 0 e k e poi facciamo tendere k all'infinito.
   È
   $$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$
   da cui
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}[\arctan \frac{x+1}{2}]_0^k =$$
   $$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}[\arctan \frac{k+1}{2} - \arctan \frac{1}{2}] = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2}.$$

8. Ricordiamo che è

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Vediamo come è fatta la parabola: ha massimo in $x = 2$, è concava, si annulla in $2 \pm \sqrt{12} \approx -1,5$ o $5,5$, nel punto -1 vale $7/8$. Calcoliamo quindi lo sviluppo

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

9. Calcolare l'area compresa tra l'asse x e il grafico di $\arctan x$ per $0 \leq x \leq 2$.
Si tratta di fare l'integrale tra 0 e 1; ricordiamo che $\arctan x$ si integra per parti e produce come primitive

$$x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + c$$

da cui risulta

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \lg 2$$

che è positivo.

10. Studiare la funzione $f(x) = x \arctan x$
È pari (quindi la derivata è dispari); è sempre positiva e si annulla in 0. Ha asintoto per $x \to +\infty$ che ha coeff. angolare $\pi/2$; vediamo il termine noto dell'asintoto: si ha

$$x \arctan x - \frac{\pi}{2} x = x(\arctan x - \frac{\pi}{2})$$

forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$ diventata $0 \cdot \infty$; la trasformo in $\frac{\infty}{\infty}$ e cerco quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = (H) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = -1$$

L'asintoto è quindi $r(x) = \frac{-\pi}{2} x - 1$.
Ovviamente in 0 avrà un minimo; vediamo se ci fossero altri minimi o massimi.

$$f'(x) = \arctan x + x \frac{1}{1+x^2}$$

questa derivata si annulla solo per $x = 0$. Infatti guardiamo l'intersezione dei grafici. L'arcotangente è ben nota. La funzione $-x/(1+x^2)$ è dispari, si annulla in 0, è negativa per $x > 0$ dove l'arcotangente è positiva e viceversa. Quindi altre intersezini non ci sono.

11. Quale parabola meglio approssima $x \sin x$ in un intorno di 0? Ovviamente $p(x) = x^2$.

12. A destra di 0 chi è piú grande, $\arctan x$ o $\sin x$?
    Utilizzando gli sviluppi si ha $\arctan x - \sin x = -f13x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, e quindi ho un valore negativo.

13. A destra di 0 chi è piú grande, $\operatorname{tg} x$ o $\arcsin x$?
    Gli sviluppi danno come secondo termine $x^3/3$ per la tangente e $x^3/6$ per l'arcoseno, quindi è piú grande la tangente.
    In tutti questi casi non era sufficiente guardare la derivata prima, perché erano uguali a 1 sempre.