MATEMATICA I
Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica
Prova parziale del 25.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti
Tema A - abbozzo di soluzioni

1. Trovare la tangente al grafico della funzione
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
nel punto $(\pi, f(\pi))$. Il punto π è interno ad un intervallo di crescenza o di decrescenza della f?
Sol. - È
$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \Longrightarrow f'(\pi) = \frac{1}{\pi}$$
La tangente ha equazione $r(x) = f'(\pi)(x-\pi) + f(\pi) = -\frac{1}{\pi} + 1$.
Essendo la derivata negativa in un intorno di π il punto π è interno ad un intervallo di decrescenza.

2. Si disegnino i grafici delle seguenti funzioni:
$$f_1(x) = \lg_{0,5} x^2; \qquad f_2(x) = \lg_2 3x$$
La f_1 è definita su $\mathbb{R}\backslash 0$ (non se ne è accorto quasi nessuno) ed è pari, crescente sulla semiretta dei reali negativi, decrescente su quella dei reali positivi, va a $+\infty$ per $x \to 0$ (sia da destra che da sinistra). Il grafico passa per i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$.
La f_2 (che si può scrivere come $\lg_2 3 + \lg_2 x$) è definita solo sulla semiretta dei positivi, è crescente e il suo grafico incontra l'asse delle x nel punto $(1/3, 0)$. Molti invece l'hanno fatto passare per il punto $(1,0)$, e pochissimi si sono occupati di disegnare accuratamente i grafici tenendo conto della pendenza.

3. La funzione
$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$$
non è definita per $x = 0$. È prolungabile per continuità in quel punto? In che modo?
Si giustifichino le risposte.
Sol. - È $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (una funzione che va a zero moltiplicata una limitata va a zero), pertanto ponendo $f(0) = 0$ la si è prolungata pe continuità. Alcuni nel calcolare il limite hanno operato la sostituzione $\frac{1}{x} = t$, ma dopo non hanno tenuto conto che per $x \to 0$ è $t \to \infty$, e quindi hanno trovato il limite errato 1.

4. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{\frac{1}{1+x^2}}$$
(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali).
Si può dedurre che esistono dei flessi senza calcolare la derivata seconda? In base a quale teorema?
Giustificare le risposte.
Sol. - Funzione pari, definita, continua e derivabile ovunque (quindi nessun

asintoto verticale), tende a 1 per $x \to \infty$ (quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale, il che scarta l'ipotesi di asintoti obliqui), crescente sulla semiretta dei reali negativi, decrescente su quella dei positivi; ha massimo in $x = 0$, e questo massimo vale e. Ci sono di sicuro dei flessi perché la f' vale 0 in $x = 0$ e tende a 0 per $x \to \infty$, e quindi in ciascuna semiretta c'è almeno un punto di massimo o di minimo per tale derivata prima, il che garantisce l'esistenza di un flesso (c'è un minimo della f' sulla semiretta dei positivi e un massimo su quella dei negativi). Da notare che il teor. di Rolle garantisce l'annullarsi della derivata di una funzione *perché c'è un massimo o un minimo interno a seguito del teor. di Weierstrass*, mentre alcuni hanno ritenuto che il teor. di Rolle dicesse che la derivata nei punti di massimo o minimo è nulla, cosa che è garantita da un altro teorema. Alcuni hanno stranamente disegnato una cuspide in $x = 0$. Vale anche la pena di ribadire che si dice "asintoto" e <u>non</u> "assindoto", e "obliquo" e <u>non</u> "obblicuo".

5. Ricordando il significato geometrico della derivata, esistono punti di ascissa uguale in cui le tangenti ai grafici delle funzioni

$$f_1(x) = e^{\arctan x} \text{ e } f_2(x) = \arctan x$$

sono parallele?
Esistono punti in cui tali tangenti sono coincidenti?
Giustificare le risposte.
Sol. - È

$$f_1'(x) = e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2} \qquad f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

e le due derivate sono uguali soltanto quando $e^{\arctan x} = 1$, cioè $x = 0$. In tale punto le due funzioni valgono rispettivamente e e 1, quindi le tangenti non hanno punti a comune. Alcuni hanno detto che si incrociano (si ricorda che due rette che hanno lo stesso coefficiente angolare sono parallele, e coincidenti solo se hanno un punto a comune, perché allora li hanno tutti).

6. Trovare tutte le primitive di

$$\sqrt{x} + \lg x + \cos x;$$

quindi tra queste trovare quella che nel punto 1 vale 1.
Sol. - Tutte le primitive costituiscono la famiglia

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\lg x - x + \sin x + c$$

e pertanto quella che vale 1 per $x = 1$ si ottiene ponendo $\frac{2}{3} + \lg 1 - 1 + \sin 1 + c = 1$ da cui $c = \frac{4}{3} - \sin 1$. Alcuni hanno derivato invece che integrare, altri hanno trovato per c una funzione, in quanto non hanno calcolato le primitive nel punto.

7. La locuzione "teorema fondamentale del calcolo integrale" e i nomi di Torricelli e Barrow sono legati a teoremi importanti. Si espongano i teoremi coinvolti.
Sol. - I due teoremi si trovano sul testo. Uno è sotto il nome di "teorema fondamentale del calcolo integrale" (pag. 104), che dice che la funzione

$$A(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

è una primitiva della f quando questa è continua su un intervallo a cui appartengono anche a e x. L'altro teorema, che il libro riporta sotto il nome di "regola di Barrow-Torricelli" (pag. 107) dice che se a e b appartengono ad un intervallo di continuità della f è

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

dove $F(x)$ è una qualsiasi primitiva della f. Il secondo teorema discende dal primo e dal fatto che una funzione che ha derivata nulla in un intervallo è una costante. Molti hanno detto che "la funzione $A(x)$ è una primitiva della f" senza dire chi era $A(x)$: hanno ricordato l'enunciato del testo, che però aveva definito $A(x)$ alla riga prima; altri hanno confuso la $A(x)$ che è una specifica primitiva con la $F(x)$ comparente nella seconda formula, che invece è una primitiva qualsiasi; altri ancora hanno fortemente confuso gli estremi di integrazione, facendo risultare la $A(x)$ come l'integrale definito della f su $[a, b]$, che è invece un numero. Altri hanno confuso definizione di primitiva con uno dei teoremi; altri hanno scritto lo stesso teorema usando parole diverse, convinti di aver enunciato due teoremi diversi. La diversità tra la terminologia del libro e quella di altri testi non può essere chiamata a giustificazione della confusione fatta da alcuni.

8. Data una funzione f, si considerino le due funzioni f^+ ed f^-. Quanto vale la loro somma?
Se una funzione è positiva, cosa si può dire della sua f^+? e della sua f^-? Giustificare le risposte.
Sol. - È $f^+ + f^- = |f|$; se f è positiva la f^+ coincide con la f e la f^- è nulla (alcuni hanno detto che f^- "non c'è", il che è sbagliato). Molti hanno tirato in causa la somma di integrali, che non c'entra niente (a volte confondendo somma con differenza); le definizioni della f^+ e della f^- sono state date nel capitolo degli integrali semplicemente perché sono utili *per definire* l'integrale di una funzione di segno variabile, ma non hanno niente a che vedere con l'integrale. Alcuni hanno detto che la f^- è negativa.

Tema B - abbozzo di soluzioni

1. Trovare la tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

nel punto $(\pi, f(\pi))$. Il punto π è interno ad un intervallo di crescenza o di decrescenza della f?
Sol. - È

$$f'(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} \Longrightarrow f-(\pi) = \frac{1}{\pi^2}$$

Pertanto la tangente ha equazione

$$r(x) = \frac{1}{\pi^2}x - \frac{2}{\pi}$$

e π è all'interno di un intervallo di crescenza della f.

2. Si disegnino i grafici delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \lg_{0,5} x^2; \qquad f_2(x) = \lg_{0,5} 3x^2$$

Hanno punti in comune?
Giustificare le risposte.
Sol. - Entrambe sono definite su $\mathbb{R} \setminus 0$ (non se ne è accorto quasi nessuno) e sono pari, crescenti sulla semiretta dei reali negativi, decrescenti su quella dei reali positivi, vanno a $+\infty$ per $x \to 0$ (sia da destra che da sinistra). Il grafico di f_1 passa per i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, mentre il grafico di $f_2 = \lg_{0,5} 3 + \lg_{0,5} x^2$ passa per i punti $(-1/3, 0)$ e $(1/3, 0)$. Ovviamente non hanno punti in comune, dato che il grafico di f_2 è ben staccato dal grafico di f_1 restandogli *al di sotto* su entrambe le semirette, dato che è $\lg_{0,5} 3 < 0$.

3. La funzione

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$$

non è definita per $x = 0$. È prolungabile per continuità in quel punto? In che modo?
Si giustifichino le risposte.
Sol. - La f è una funzione infinitesima (cioè tende a 0) per $x \to 0$ perché prodotto di una infinitesima per una limitata. Pertanto ponendo $f(0) = 0$ si ha il prolungamento per continuità. Vari hanno detto che $\cos \frac{1}{x}$ tendeva all'infinito.

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1 + x^2}$$

(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali).
Si può dedurre che esistono dei flessi senza calcolare la derivata seconda? In base a quale teorema?
Giustificare le risposte.
Sol. - Funzione pari, definita, continua e derivabile ovunque (quindi nessun asintoto verticale), tende a 0 per $x \to \infty$ (quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale, il che scarta l'ipotesi di asintoti obliqui), crescente sulla semiretta dei reali negativi, decrescente su quella dei positivi; ha massimo in $x = 0$, e questo massimo vale $\frac{\pi}{2}$. Ci sono di sicuro dei flessi perché la f' vale 0 in $x = 0$ e tende a 0 per $x \to \infty$, e quindi in ciascuna semiretta c'è almeno un punto di massimo o di minimo per tale derivata prima, il che garantisce l'esistenza di un flesso (c'è un minimo della f' sulla semiretta dei positivi e un massimo su quella dei negativi). Da notare che il teor. di Rolle garantisce l'annullarsi della derivata di una funzione *perché c'è un massimo o un minimo interno a seguito del teor. di Weierstrass*, mentre alcuni hanno ritenuto che il teor. di Rolle dicesse che la derivata nei punti di massimo o minimo è nulla, cosa che è garantita da un altro teorema. Alcuni hanno stranamente disegnato una cuspide in $x = 0$.

5. Ricordando il significato geometrico della derivata, esistono punti di ascissa uguale in cui le tangenti ai grafici delle funzioni

$$f_1(x) = e^{\arctan x} \text{ e } f_2(x) = \arctan x$$

sono parallele?
Esistono punti in cui tali tangenti sono coincidenti?
Sol. - È

$$f_1'(x) = e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2} \qquad f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

e le due derivate sono uguali soltanto quando $e^{\arctan x} = 1$, cioè $x = 0$. In tale punto le due funzioni valgono rispettivamente e e 1, quindi le tangenti non hanno punti a comune. Alcuni hanno detto che si incrociano (si ricorda che due rette che hanno lo stesso coefficiente angolare sono parallele, e coincidenti se hanno un punto a comune, perché allora li hanno tutti).

6. Trovare tutte le primitive di

$$\sqrt{x} + \arctan x + \sin x;$$

quindi tra queste trovare quella che nel punto 1 vale 0.
Sol. - Tutte le primitive costituiscono la famiglia

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\arctan x - \frac{1}{2}\lg(x^2+1) - \cos x + c$$

e pertanto quella che vale 0 per $x = 1$ si ottiene ponendo $\frac{2}{3} + \arctan 1 - \frac{1}{2}\lg 2 - \cos 1 + c = 0$ da cui $c = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\lg 2 + \cos 1$. Alcuni hanno derivato invece che integrare, altri hanno trovato per c una funzione, in quanto non hanno calcolato le primitive nel punto.

7. La locuzione "teorema fondamentale del calcolo integrale" e i nomi di Torricelli e Barrow sono legati a teoremi importanti. Si espongano brevemente i teoremi e i concetti coinvolti.
Sol. - Vedi Tema A, domanda 7.

8. Data una funzione f, si considerino le due funzioni f^+ ed f^-. Quanto vale la loro somma?
Se una funzione è positiva, cosa si può dire della sua f^+? e della sua f^-?
Giustificare le risposte.
Sol. - Vedi Tema A, domanda 8.