MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 25.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti

Tema C - abbozzo di soluzioni

1. Trovare la tangente al grafico della funzione
$$f(x) = x \lg x$$
nel punto $(1, f(1))$. Il punto 1 è interno ad un intervallo di crescenza o di decrescenza della f?
Sol. La tangente ha per equazione
$$r(x) = f'(1)(x-1) + f(1)$$
È $f'(x) = \lg x + 1$, e quindi $r(x) = x - 1$; poiché $f'(1) = 1 > 0$ il punto si trova in un intervallo di crescenza.

2. Si disegnino i grafici delle seguenti funzioni:
$$f_1(x) = 0,5^x; \qquad f_2(x) = 2^{3x}$$
La prima funzione è decrescente da $-\infty$ a 0, il grafico passa (ovviamente) per il punto $(0,1)$ e per il punto $(1,\ 0,5)$; la seconda, che è $f_2(x) = 8^x$, è crescente da 0 a $+\infty$ e passa per i punti $(0,1)$ e $(1,8)$. Quasi nessuno ha fatto i grafici in scala; la maggior parte ha buttato giù dei grafici molto approssimativi, senza ascisse né ordinate.

3. La funzione
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x^2}$$
non è definita per $x = 0$. È prolungabile per continuità in quel punto? In che modo?
Si giustifichino le risposte.
Sol. - Il limite per $x \to 0$ esiste e vale 0 perché si tratta di una funzione infinitesima per una limitata. Pertanto ponendo $f(0) = 0$ si ha il prolungamento per continuità. Molti hanno detto che siccome non esisteva il limite di $\sin(1/x^2)$ allora non poteva esistere il limite del prodotto. Si può notare, ma è irrilevante ai nostri fini, che la f è dispari.

4. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$$
(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, attacchi, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali).
Giustificare le risposte.
Sol. - Funzione pari, sempre positiva, non definita per $x = \pm 1$. Entro l'intervallo $]-1, +1[$ la funzione va a $+\infty$ per $x \to \pm 1$ ed ha un minimo locale in $x = 0$ dove vale e. Esternamente a tale intervallo, per $x \to \pm\infty$ la funzione tende a 1 restando con valori inferiori; per $x \to \pm 1$ la funzione tende a 0 (intuitivamente si può pensare $e^{-\infty}$). La derivata è composta da

fattori che non si annullano mai e da $-2x$. Ciò indica che la funzione è decrescente nei singoli intervalli $(-\infty, -1[$ e $]-1, 0[$ (*non* sull'intera semiretta!), e analogamente è crescente in quelli simmetrici con le x positive. La derivata tende a $+\infty$ per $x \to \pm 1$ da dentro l'intervallo $]-1, 1[$ e tende a 0 per $x \to \pm 1$ venendo da fuori dell'intervallo $]-1, 1[$ (va a 0 un'esponenziale, mentre va all'infinito una funzione razionale, e quindi l'esponenziale trascina tutto a 0). Vari invece hanno creduto che la derivata tendesse all'infinito anche in questo secondo caso.

5. Ricordando il significato geometrico della derivata, esistono punti di ascissa uguale in cui le tangenti ai grafici delle funzioni

$$f_1(x) = \lg(\arctan x) \text{ e } f_2(x) = \arctan x$$

sono parallele?
Esistono punti in cui tali tangenti sono coincidenti?
Giustificare le risposte.
Sol. - Rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare; le tangenti hanno come coefficiente angolare nel punto x_0 le derivate $f_1'(x_0)$ ed $f_2'(x_0)$ rispettivamente. Pertanto dovrà essere

$$\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \frac{1}{\arctan x} = 1 \Longrightarrow x = \tan 1$$

(*non* è $x = \pi/4$). I punti dei grafici per i quali le tangenti sono parallele sono dunque nel punto $(\tan 1, f_1(\tan 1))$ e$(\tan 1, f_2(\tan 1))$ rispettivamente; ma l'arco la cui tangente è la tangente di 1 è evidentemente 1, il cui logaritmo è 0, e quindi i punti sono $(\tan 1, 0)$, e $(\tan 1, 1)$ rispettivamente. Le due tangenti sono parallele solo in quei punti, e poiché in quei punti il valore delle funzioni è diverso, 0 e 1 rispettivamente, le due tangenti non hanno punti a comune. Alcuni hanno detto che le tangenti possono essere parallele e poi incontrarsi.

6. Trovare tutte le primitive di

$$\sqrt{x} + \arctan x + \cos x;$$

quindi tra queste trovare quella che nel punto 1 vale 1.
Sol. - Integrando per parti $\arctan x = 1 \cdot \arctan x$, si trova che la famiglia di primitive è $\frac{2}{3}x^{3/2} + x \arctan x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2) \sin x + c$; la costante c che soddisfa alla condizione è

$$c = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\lg 2 + \sin 1.$$

7. Si dia la definizione di "funzione semplice" e si illustri in quale ambito è stata usata.
Sol. - È una combinazione lineare di funzioni caratteristiche, ed è stata usata per introdurre il concetto di integrale; infatti l'integrale di una funzione semplice positiva è intuitivo: si tratta di una somma di aree di rettangoli (vd. testo, pagg. 97-98).

8. Data la funzione $f(x) = \lg_{1/2} x$, si disegnino le due funzioni f^+ ed f^-.
Sol. - La f^+ decresce da $+\infty$ a 0 nell'intervallo $]0, 1[$ e vale 0 sulla semiretta $[1, +\infty)$; la f^- vale 0 sull'intervallo detto e cresce da 0 a $+\infty$ sulla semiretta.

Tema D

1. Trovare la tangente al grafico della funzione
$$f(x) = \frac{\lg x}{x}$$
nel punto $(1, f(1))$. Il punto 1 è interno ad un intervallo di crescenza o di decrescenza della f?
Sol. - La tangente ha equazione $r(x) = x - 1$, e il punto è interno ad un intervallo di crescenza.

2. Si disegnino i grafici delle seguenti funzioni:
$$f_1(x) = 5^x; \qquad f_2(x) = 5^{3x}$$
Sol. - Sono esponenziali crescenti e i loro grafici passano, oltre che ovviamente per il punto $(0, 1)$, per i punti $(1, 5)$ e $(1, 125)$ rispettivamente. Quasi nessuno ha fatto grafici che rispettassero queste proporzioni. Alcuni hanno notato che la velocità verso l'infinito era molto più forte per 5^{3x}, ma senza precisazioni numeriche sugli assi. Quasi nessuno ha notato che è $5^{3x} = 125^x$.

3. La funzione
$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$$
non è definita per $x = 0$. È prolungabile per continuità in quel punto? In che modo?
Si giustifichino le risposte.
Sol. - Assolutamente analogo all'es. 3 del tema C. Si può notare, ma è irrilevante ai nostri fini, che la f è pari.

4. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan \frac{1}{1 - x^2}$$
(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, attacchi, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali).
Giustificare le risposte.
Sol. - La funzione non è definita per $x = \pm 1$, ha limite $-\pi/2$ per $x \to -1^-$ e $x \to 1+$, ha limite $+\pi/2$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$, è decrescente negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $]1, 0]$ (ma *non* da $-\infty$ a 0!), ha minimo in $x = 0$ che vale $\arctan 1 = \pi/4$, è crescente negli intervalli $]0, 1[$ e $]1, +\infty)$ (ma *non* da 0 a $+\infty$!), ha asintoto orizzontale sia destro che sinistro $y = 0$. Gli attacchi nei punti di discontinuità portano una derivata che vale -2 in -1 (sia da destra che da sinistra) e $+2$ in 1 (sia da destra che da sinistra). Alcuni hanno trovato dei limiti infiniti sbagliando qualche calcolo, ma dovevano considerare che l'arcotangente è comunque limitata.

5. Ricordando il significato geometrico della derivata, esistono punti di ascissa uguale in cui le tangenti ai grafici delle funzioni
$$f_1(x) = \lg(\arctan x) \text{ e } f_2(x) = \arctan x$$
sono parallele?
Esistono punti in cui tali tangenti sono coincidenti?
Sol. - Vedi es. 5 del tema C.

6. Trovare tutte le primitive di

$$\sqrt{x} + x \lg x + \sin x;$$

quindi tra queste trovare quella che nel punto 1 vale 1.
Sol. - Integrando per parti $x \lg x$ si ha la famiglia di primitive

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} \lg x - \frac{x^2}{4} - \cos x + c$$

e quella che nel punto 1 vale 1 porta per c il valore $\frac{7}{12} + \cos 1$. Non pochi hanno omesso in quest'ultimo passaggio il termine $\cos 1$, forse ritenendo che facesse 0.

7. Si dia la definizione di "funzione semplice" e si illustri in quale ambito è stata usata.
Sol. - Vedi es. 9 del tema C.

8. Data la funzione $f(x) = \lg_{1/2} |x|$, si disegnino le due funzioni f^+ ed f^-.
Sol. - Vedi es. 10 del tema C.