MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 4.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti

**Tema A - abbozzo di soluzioni**

I numeri rimandano al libro di testo: Barozzi-Bergamaschi-Gonzalez: *Nuovo Calculus*, Progetto, 2002, oppure, se preceduti da "E", rimandano al libro di esercizi: Antoniazzi-Pavarin-Zannol: *Esercizi di Matematica A*, Progetto, 2003.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   Sol. - vd. Def. 2.8, a), p. 65. Alcuni hanno fatto grafici in cui il limite era solo da una parte. Altri hanno considerato la funzione $f(x) = -\frac{1}{x-1}$ non notando che questa ha per limite $\infty$ (senza segno!) perché un limite laterale è $+\infty$ e l'altro è $-\infty$. Un esempio di quel tipo sarebbe invece $-\frac{1}{|x-1|}$.

2. Sia $\{a_n\}$ una successione strettamente decrescente e inferiormente limitata; si dimostri che ha un limite.
   Tale limite è l'estremo inferiore? È il minimo?
   Giustificare tutte le risposte.
   Sol. - Assolutamente analogo al teor. 2.3, p. 47, basta sostituire sup con inf. La successione non ha minimo: se fosse che un certo $a_{\overline{n}}$ è minimo, non ci potrebbe essere un $a_{n+1} < a_{\overline{n}}$, mentre la sucessione è strettamente decrescente.

3. Sia $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ un quoziente di due polinomi, dove il grado di $P(x)$ è minore del grado di $Q(x)$ e $Q(x)$ non ha zeri reali. Si dimostri che $f(x)$ è una funzione limitata.
   Sol. - Esiste il limite finito per $x \to \infty$ ed è 0; pertanto $\exists\ x_0$ e $x_1$ tali che sulle semirette $(-\infty, x_0]$ e $[x_1, +\infty)$ la funzione è limitata perché compresa tra $-\epsilon$ e $+\epsilon$. Sull'intervallo $[x_0,\ x_1]$ la funzione è limitata perché continua su un insieme chiuso e limitato (teor. di Weierstrass, p. 71). Da notare che se il denominatore si annullasse in qualche punto non si potrebbe concludere che la $f$ è continua in un chiuso e limitato, perché sarebbe non definita in tali punti.

4. Si dia la definizione di funzione composta e si trovi un esempio in cui la composizione di due funzioni non è commutativa, cioè $f \circ g \neq g \circ f$.
   Sol. - vd. pp. 42-43.

5. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?
   Sol. - Il primo limite vale 1, ed è un limite notevole. (<u>Attenzione</u>: ciò *non* è per definizione, ma lo si dimostra, anche se la dimostrazione non

fa parte del programma d'esame.) Il secondo limite vale 0, perché si tratta di un prodotto di una funzione limitata (il seno) per una che tende a 0 (vd. 2.22, p. 64).

6. Si dica dove sono invertibili le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e si faccia un abbozzo del grafico delle funzioni inverse.
   Sol. - Il seno è invertibile in ciascuno degli intervalli del tipo $[-\pi/2 + 2K\pi,\ \pi/2+2K\pi]$, dove è crescente, e in ciascuno degli intervalli $[\pi/2+2K\pi,\ 3\pi/2 + 2K\pi]$, dove è decrescente. La sua inversa sull'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ (cioè del primo tipo con $K = 0$) è $\arcsin x$, e la sua inversa su ciascuno degli altri intervalli del primo tipo è $\arcsin x + 2K\pi$ (con $K \neq 0$). La sua inversa sugli intervalli del secondo tipo è $\arccos x + \pi/2 + 2K\pi$ (ciò è ovvio, dato che $\sin(x+\pi/2) = \cos x$). Il coseno a sua volta è invertibile in ciascuno degli intervalli $[2K\pi,\ 2(K+1)\pi]$, dove è decrescente, e in ciascuno degli intervalli $[2(K+1)\pi,\ 2(K+2)\pi]$, dove è crescente. La sua inversa sull'intervallo $[0, \pi]$ (cioè del primo tipo per $K = 0$) è $\arccos x$, mentre sugli altri intervalli del primo tipo l'inversa è $\arccos x + 2K\pi$; sugli intervalli del secondo tipo l'inversa è $\arcsin x + \pi/2 + 2K\pi$ (ciò è ovvio, dato che $\cos(x + \pi/2) = \sin x$). La tangente è invertibile su ciascuno degli intervalli del tipo $]-\pi+K\pi, \pi+K\pi[$, dove è crescente. L'inversa della tangente ristretta all'intervallo $]-\pi, \pi[$ (cioè con $K = 0$) è $\arctan x$; sugli altri intervalli l'inversa è l'arcotangente traslata sull'asse delle ordinate di $K\pi$, quindi $\arctan x + K\pi$. Nessuno ha disegnato i singoli grafici di tutte queste inverse, neanche quelli che hanno individuato gli altri intervalli di invertibilità oltre quelli per $K = 0$; per lo più si sono limitati a disegnare l'arcoseno, l'arccocoseno e l'arcotangente. Qualcuno ha disegnato sullo stesso grafico tutte le inverse, ottenendo cosí funzioni non univoche. (<u>Attenzione</u>: quanto sopra *non* è contraddetto, ma anzi è confermato da quanto detto e disegnato in E, p. 24-27, perché lí è detto chiaro che l'inversione che dà luogo all'arcoseno, arcocoseno e arcotangente è fatta su quegli intervalli specifici; l'esercizio invece chiedeva dove le funzioni sono invertibili in genere.)

7. Si dica dove è definita la funzione $\lg \sqrt{x^2 - 1}$ e quale è la sua immagine. Si giustifichi la risposta.
   Sol. - L'argomento del logaritmo deve essere positivo, quindi $x^2 > 1$, quindi $|x| > 1$, cioè $\{(-\infty, -1[\cup]1, +\infty)\}$. La funzione è pari, la sua immagine è tutto $\mathbb{R}$ (alcuni hanno risposto $\mathbb{R}^+$, forse credendo che per $|x| = 1$ la funzione valesse $\lg 1$).

8. Si dica se la funzione $f(x) = xe^{\cos x}$ ha limite per $x \to \infty$; si dica se è periodica. Si giustifichino le risposte.
   Sol. - Non è periodica, perché $f(x + 2\pi) = (x + 2\pi)e^{\cos x} \neq f(x)$, e ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$ e $-\infty$ per $x \to -\infty$, quindi nel suo complesso,

per rispondere precisamente alla domanda, ha limite $\infty$ (senza segno) per $x \to \infty$. Infatti il primo fattore tende a $\infty$ e il secondo fattore è limitato e i suoi valori sono staccati dallo zero. Il grafico è oscillante, compreso tra la retta $e^{-1}x$ (che viene toccata per tutti quegli $x$ per cui è $\cos x = -1$, quindi $x = \pi + 2K\pi$) e la retta $ex$ (che viene toccata per tutti quegli $x$ per cui è $\cos x = 1$, quindi $x = 2K\pi$). La funzione è dispari (la $x$ cambia segno, il coseno no) e ovviamente è $f(0) = 0$.

9. Si enuncino due casi di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$ per $x \to 2$ in cui esistono i limiti, ma diversi nei due casi, giustificando le risposte.
   Sol. - Basta prendere $f(x) = \frac{1}{x-2}$ e $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ e metterle una a numeratore e l'altra a denominatore, e poi scambiarle. La prima va all'infinito del primo ordine, l'altra del secondo. Facendo il rapporto e semplificando una volta viene $x-2$ che va a 0, e una volta viene $\frac{1}{x-2}$ che va a infinito. Qualsiasi altro esempio, come il mettere a numeratore e denominatore multipli interi di $(x-2)$, in modo che il limite venga il quoziente di tali multipli, è del pari valido. (Attenzione: chi ha scritto dei polinomi di secondo grado che si annullavano in $x = 2$ e poi ha diviso per $x^2$ ha creduto che il limite risultasse il quoziente dei coefficienti di grado massimo, pensando che andassero a zero i termini in $x^{-1}$ e $x^{-2}$; ma quei termini vanno a zero per $x \to \infty$, non per $x \to 2$.)

10. Si enunci il principio di induzione, indicando almeno un caso in cui è stato utilizzato.
    Sol. - vd. p. 1. Un esempio è la dimostrazione che è $10^n > 10n$, p. 2; un altro è in 1.22, pp. 33-34; un altro è nella definizione di "fattoriale", p. 32.