MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 4.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti

Tema B - abbozzo di soluzioni

I numeri rimandano al libro di testo: Barozzi-Bergamaschi-Gonzalez: *Nuovo Calculus*, Progetto, 2002, oppure, se preceduti da "E", rimandano al libro di esercizi: Antoniazzi-Pavarin-Zannol: *Esercizi di Matematica A*, Progetto, 2003.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   Sol. - vd. Def. 2.8, a), p. 65.

2. Sia $\{a_n\}$ una successione strettamente crescente; si dimostri che ha un limite, finito o $+\infty$.
   Tale limite è l'estremo superiore? È il massimo?
   Giustificare tutte le risposte.
   Sol. - Vd. teor. 2.3, p. 47. La successione non ha massimo: se fosse che un certo $a_{\overline{n}}$ è massimo, non ci potrebbe essere un $a_{n+1} > a_{\overline{n}}$, mentre la sucessione è strettamente crescente.

3. Sia $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ un quoziente di due polinomi di uguale grado. Dove è definita la funzione? Dove è continua? Esiste finito il limite per $x \to \infty$? In quali casi la funzione è limitata?
   Giustificare tutte le risposte.
   Sol. - La $f(x)$ è definita per i punti in cui non si annulla il denominatore. Essa è continua in tutti gli altri punti, in quanto quoziente di funzioni continue. Esiste il limite finito per $x \to \infty$ e coincide con il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo (vd. E, p. 90, es. 4). La funzione, per x che tende a un punto x_0 in cui si annulla il denominatore $Q(x)$, solitamente va all'infinito ($+\infty$ da una parte e $-\infty$ dall'altra), e quindi in un intervallo contenente quel punto non è limitata, e pertanto non lo è nel suo complesso; però se in quello stesso x_0 si annulla anche il numeratore $P(x)$ siamo nel caso di indeterminazione $\frac{0}{0}$, che può dare un limite finito, e in questo caso la funzione risulta limitata (anzi, si può prolungare per continuità in x_0). Ciò succede se nella scomposizione in fattori di $P(x)$ e di $Q(x)$ rimane un fattore del tipo $x - x_0$ sia al numeratore che al denominatore, con lo stesso grado (esempio: $\frac{6x-3}{2x-1}$ ha limite 3 per $x \to \frac{1}{2}$); non può succedere invece se i due polinomi sono già ridotti ai minimi termini. *Nessuno ha considerato questo caso, nonostante fosse stato svolto in classe pure con il commento sul prolungamento per continuità.*

4. Si dia la definizione di funzione composta e si trovi un esempio in cui la composizione di due funzioni non è commutativa, cioè $f \circ g \neq g \circ f$.
   Sol. - vd. pp. 42-43.

5. La funzione $\frac{\cos x}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?
Si giustifichino le risposte.
Sol. - Il primo limite vale ∞ (senza segno: vale $+\infty$ da destra e $-\infty$ da sinistra). Il secondo limite vale 0, perché si tratta di un prodotto di una funzione limitata (il coseno) per una che tende a 0 (vd. 2.22, p. 64).

6. Si dica dove sono invertibili le funzioni a^x, con $0 < a < 1$, $|\log x|$, $\tan x$, e si faccia un abbozzo del grafico delle funzioni inverse.
Sol. - a^x con $a < 1$ è invertibile su tutto l'asse reale, e la sua inversa è $\log_a x$, che è definita solo per gli $x > 0$ e ha un grafico decrescente da $+\infty$ a $-\infty$ e passante per $(1, 0)$. La funzione $|\log x|$ è invertibile singolarmente su ciascuno dei due intervalli $]0, 1]$ e $[1, +\infty)$; i due grafici distinti corrispondenti a queste due distinte funzioni inverse si ottengono per simmetria dei singoli pezzi rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (chi ha disegnato un grafico unico ha ottenuto una funzione che non è univoca). La tangente è invertibile su ciascuno degli intervalli del tipo $]-\pi + K\pi, +\pi + K\pi[$ (e *non* solo sull'intervallo $]-\pi, \pi[$!!!). L'inversa della tangente ristretta all'intervallo $]-\pi, \pi[$ è l'arcotangente; le inverse della tangente ristretta a ciascuno degli altri intervalli sono l'arcotangente traslata sull'asse delle ordinate di $K\pi$, quindi $\arctan x + K\pi$. *Nessuno ha disegnato queste inverse, neanche quei pochissimi che hanno individuato questi altri intervalli di invertibilità.*

7. Si dica dove è definita la funzione $\sqrt{\lg(x^2 - 1)}$ e quale è la sua immagine.
Si giustifichi la risposta.
Sol. - L'argomento del logaritmo deve essere positivo, quindi $x^2 > 1$, quindi $|x| > 1$; poi, ancora, deve essere positivo l'argomento della radice, e quindi l;argomento del logaritmo deve essere maggiore o uguale a 1, il che porta $x^2 - 1 \geq 1 \Longrightarrow x^2 \geq 2 \Longrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$ cioè $\{(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)\}$. La funzione è pari, la sua immagine è $\mathbb{R}^+$.

8. Si dica se la funzione $f(x) = x^2 e^{\sin x}$ ha limite per $x \to \infty$; si dica se è periodica, se è superiormente limitata, se è inferiormente limitata. Si giustifichino le risposte.
Sol. - Non è periodica, e ha limite $+\infty$ (infatti il primo fattore tende a $+\infty$ e il secondo fattore è limitato e i suoi valori sono staccati dallo zero); pertanto non è superiormente limitata. Lo è invece inferiormente, dato che è il prodotto di due funzioni di cui una si annulla solo nello 0 e l'altra non si annulla mai. Ha minimo, che è 0. Il grafico è oscillante, compreso tra la parabola $e^{-1}x^2$ (che viene toccata per tutti quegli x per cui è $\sin x = -1$, quindi $x = -\pi/2 + 2K\pi$) e la parabola

ex^2 (che viene toccata per tutti quegli x per cui è $\sin x = 1$, quindi $x = \pi/2 + 2K\pi$).

9. Si enuncino due casi di indeterminazione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \to 2$ in cui esistono i limiti, ma diversi nei due casi, giustificando le risposte.
   Sol. - Basta prendere $f(x) = \frac{1}{x-2}$ e $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ e metterle una a numeratore e l'altra a denominatore, e poi scambiarle. La prima va all'infinito del primo ordine, l'altra del secondo. Facendo il rapporto e semplificando una volta viene $x - 2$ che va a 0, e una volta viene $\frac{1}{x-2}$ che va a infinito.

10. Due insiemi A e B della retta hanno lo stesso estremo inferiore e lo stesso estremo superiore. Dare un esempio in cui tali insiemi *non* sono uguali. Possono essere disuguali anche se sono due intervalli?
    Giustificare le risposte.
    Sol. - Un intervallo chiuso $[a, b]$ ed il corrispondente intervallo aperto $]a, b[$ sono diversi e hanno lo stesso estremo superiore e lo stesso estremo inferiore; sono quindi un esempio sia per il primo quesito che per il secondo: essi non sono uguali, pur essendo entrambi intervalli.