MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 4.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti

Tema C - abbozzo di soluzioni

I numeri rimandano al libro di testo: Barozzi-Bergamaschi-Gonzalez: *Nuovo Calculus*, Progetto, 2002, oppure, se preceduti da "E", rimandano al libro di esercizi: Antoniazzi-Pavarin-Zannol: *Esercizi di Matematica A*, Progetto, 2003.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   Sol. - vd. Def. 2.8, a), p. 65.

2. Sia $\{a_n\}$ la successione $\{(-1)^n 3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. È strettamente crescente? ha un limite, finito o no? Ha estremo superiore ed inferiore finiti?
   Giustificare tutte le risposte.
   Sol. - La successione ha valori positivi per n pari e negativi per n dispari. Il suo modulo è crescente e ha limite $+\infty$, quindi la successione ha limite ∞ (senza segno!); non ha pertanto né limite $+\infty$, né limite $-\infty$. Non ha estremo superiore finito (è $+\infty$) e non ha estremo inferiore finito (è $-\infty$). Vari studenti hanno disegnato grafici fantasiosi di funzioni, definite su tutti i reali positivi, oscillanti con oscillazione che andavano crescendo. Se di quei grafici si volesse salvare qualcosa, sarebbero i punti corrispondenti ai numeri interi positivi.

3. Sia $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ un quoziente di due polinomi di uguale grado. Dove è definita la funzione? Dove è continua? Esiste finito il limite per $x \to \infty$? In quali casi la funzione è limitata?
   Giustificare tutte le risposte.
   Sol. - La $f(x)$ è definita per i punti in cui non si annulla il denominatore. Essa è continua in tutti gli altri punti, in quanto quoziente di funzioni continue. Esiste il limite finito per $x \to \infty$ e coincide con il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo (vd. E, p. 90, es. 4). La funzione, per x che tende a un punto x_0 in cui si annulla il denominatore $Q(x)$, solitamente va all'infinito ($+\infty$ da una parte e $-\infty$ dall'altra), e quindi in un intervallo contenente quel punto non è limitata, e pertanto non lo è nel suo complesso; però se in quello stesso x_0 si annulla anche il numeratore $P(x)$ siamo nel caso di indeterminazione $\frac{0}{0}$, che può dare un limite finito, e in questo caso la funzione risulta limitata (anzi, si può prolungare per continuità in x_0). Ciò succede se nella scomposizione in fattori di $P(x)$ e di $Q(x)$ rimane un fattore del tipo $x - x_0$ sia al numeratore che al denominatore, con lo stesso grado (esempio: $\frac{6x-3}{2x-1}$ ha limite 3 per $x \to \frac{1}{2}$)); non può succedere invece se i due polinomi sono già ridotti ai minimi termini.

Nessuno ha considerato questo caso, nonostante fosse stato svolto in classe pure con il commento sul prolungamento per continuità.

4. Si dia la definizione di funzione composta e si trovi un esempio in cui la composizione di due funzioni non è commutativa, cioè $f \circ g \neq g \circ f$. Sol. - vd. pp. 42-43.

5. La funzione $\frac{\arctan x}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?
   Si giustifichino le risposte.
   Sol. - È $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, perché il grafico dell'arcotangente nello zero ha la stessa tangente del grafico della tangente (basta vedere i grafici), la quale si comporta come il seno (dato che il coseno va a 1), ed è noto che è $lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Per $x \to -\infty$ (come del resto anche per $x \to +\infty$ essendo la funzione pari), si ha il prodotto di $\frac{1}{x}$ che tende a 0 per l'arcotangente che è limitata, e quindi il limite è 0 (vd. 2.22, p. 64). <u>Attenzione</u>: non si confonda l'arcotangente, che è la funzione inversa della tangente, con la cotangente di x che è $\frac{1}{\tan x}$.

6. Si dica dove sono invertibili le funzioni a^x, con $0 < a < 1$, $|\log x|$, $\tan x$, e si faccia un abbozzo del grafico delle funzioni inverse.
   Sol. - a^x con $a < 1$ è invertibile su tutto l'asse reale, e la sua inversa è $\log_a x$, che è definita solo per gli $x > 0$ e ha un grafico decrescente da $+\infty$ a $-\infty$ e passante per $(1, 0)$. La funzione $|\log x|$ è invertibile singolarmente su ciascuno dei due intervalli $]0, 1]$ e $[1, +\infty)$; i due grafici distinti corrispondenti a queste due distinte funzioni inverse si ottengono per simmetria dei singoli pezzi rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (chi ha disegnato un grafico unico ha ottenuto una funzione che non è univoca). La tangente è invertibile su ciascuno degli intervalli del tipo $]-\pi + K\pi, +\pi + K\pi[$ (e *non* solo sull'intervallo $]-\pi, \pi[$!!!). L'inversa della tangente ristretta all'intervallo $]-\pi, \pi[$ è l'arcotangente; le inverse della tangente ristretta a ciascuno degli altri intervalli sono l'arcotangente traslata sull'asse delle ordinate di $K\pi$, quindi $\arctan x + K\pi$. Nessuno ha disegnato queste inverse, neanche quei pochissimi che hanno individuato questi altri intervalli di invertibilità.

7. Si dica dove è definita la funzione $\sqrt{\lg(x^2 - 9)}$ e quale è la sua immagine.
   Si giustifichi la risposta.
   Sol. - L'argomento del logaritmo deve essere maggiore o uguale a 1, perché il logaritmo sia maggiore di 0 e possa essere argomento della radice. L'insieme di definizione è quindi $(-\infty, -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10}, +\infty)$.

8. Si dica se la funzione $f(x) = x^2 e^{\sin x}$ ha limite per $x \to \infty$; si dica se è periodica, se è superiormente limitata, se è inferiormente limitata. Si

giustifichino le risposte.
Sol. - Non è periodica, e ha limite $+\infty$ (infatti il primo fattore tende a $+\infty$ e il secondo fattore è limitato e i suoi valori sono staccati dallo zero); pertanto non è superiormente limitata. Lo è invece inferiormente, dato che è il prodotto di due funzioni di cui una si annulla solo nello 0 e l'altra non si annulla mai. Ha minimo, che è 0. Il grafico è ondulante, compreso tra la parabola $e^{-1}x^2$ (che viene toccata per tutti quegli x per cui è $\sin x = -1$, quindi $x = -\pi/2 + 2K\pi$) e la parabola ex^2 (che viene toccata per tutti quegli x per cui è $\sin x = 1$, quindi $x = \pi/2 + 2K\pi$).

9. Si enuncino due casi di indeterminazione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \to 2$ in cui esistono i limiti, ma diversi nei due casi, giustificando le risposte.
Sol. - Basta prendere $f(x) = \frac{1}{x-2}$ e $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ e metterle una a numeratore e l'altra a denominatore, e poi scambiarle. La prima va all'infinito del primo ordine, l'altra del secondo. Facendo il rapporto e semplificando una volta viene $x - 2$ che va a 0, e una volta viene $\frac{1}{x-2}$ che va a infinito.

10. Siano A e B due insiemi della retta e A è strettamente contenuto in B. Possono avere lo stesso massimo? Se sì trovare un esempio, se no dimostrare che è impossibile.
Sol. - Ovviamente l'insieme costituito dai due numeri 0 e 1 e quello costituito dal solo numero 1 soddisfano al quesito. Ci sono infiniti altri esempi; molto evidenti sono quelli con gli intervalli chiusi che hanno lo stesso secondo estremo. Alcuni hanno creduto di "dimostrare" che non era possibile semplicemente scegliendo esempi in cui tale situazione non era verificata.